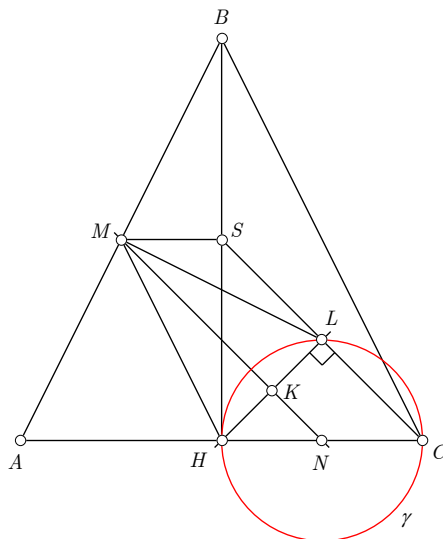


Problema 592.

Se tiene un triángulo ABC , donde $AB = BC$. Si H y S son los puntos medios de AC y HB , respectivamente, y HL es perpendicular a SC en L , pruebe que es $\angle BLA = 90^\circ$.

*Donaire, M. F. (2010), Formas y números.
La geometría en las Olimpiadas Matemáticas.
Fondo Editorial del Pedagógico San Marcos, Lima, (p. 180)*

Soluzione sintetica, Ercole Suppa.

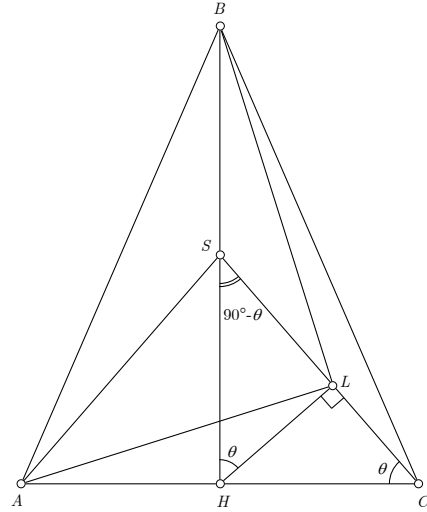


Indichiamo rispettivamente con M , N , γ i punti medii di AB , HC e la circonferenza di diametro HC . Per piccolo teorema di Talete $MS \parallel AH$, $MS = AH/2 = NC$, quindi il quadrilatero $MSCN$ è un parallelogramma. Pertanto $MN \parallel SC$ e, di conseguenza, $MN \perp HL$. Inoltre, detto $K = MN \cap HL$, sempre dal piccolo teorema di Talete, segue che $HK = KL$. Pertanto i triangoli $\triangle MKH$ ed $\triangle MKL$ sono congruenti per il primo criterio di uguaglianza. Pertanto $MH = ML$ e questo implica che la circonferenza di centro M e diametro AB passa per L , oltre che per H . Ne segue che

$$\angle ALB = \angle AHB = 90^\circ$$

e la dimostrazione è completa. □

Soluzione trigonometrica, di Ercole Suppa.



Posto $HC = a$, $HS = h$, $\angle ACS = \theta$ abbiamo $\angle HSC = \theta$, $\angle BSC = 90^\circ + \theta$, $LC = a \cos \theta$, $SL = h \sin \theta$. Dal teorema del coseno applicato ai triangoli $\triangle ALC$ e $\triangle BSC$ discende che:

$$\begin{aligned} AL^2 &= AC^2 + LC^2 - 2 \cdot AC \cdot LC \cdot \cos \theta \\ &= 4a^2 + a^2 \cos^2 \theta - 4a^2 \cos^2 \theta = 4a^2 - 3a^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} BL^2 &= BS^2 + SL^2 - 2 \cdot BS \cdot SL \cdot \cos(90^\circ + \theta) \\ &= h^2 + h^2 \sin^2 \theta + 2h^2 \sin^2 \theta = h^2 + 3h^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Da (1) e (2), tenuto conto che $h = a \tan \theta$, abbiamo:

$$\begin{aligned} AL^2 + BL^2 &= a^2(4 - 3 \cos^2 \theta) + h^2(1 + 3 \sin^2 \theta) \\ &= a^2(4 - 3 \cos^2 \theta) + a^2 \tan^2 \theta(1 + 3 \sin^2 \theta) \\ &= a^2(4 - 3 \cos^2 \theta + \tan^2 \theta + 3 \sin^2 \theta \tan^2 \theta) \\ &= a^2(1 + 3 \sin^2 \theta + \tan^2 \theta + 3 \sin^2 \theta \tan^2 \theta) \\ &= a^2(1 + \tan^2 \theta)(1 + 3 \sin^2 \theta) \\ &= a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot (\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) \\ &= a^2(1 + 4 \tan^2 \theta) \\ &= a^2 + 4h^2 \\ &= AB^2 \end{aligned}$$

e allora, per l'inverso del teorema di Pitagora, $\angle ALB = 90^\circ$. □

Soluzione con coordinate cartesiane.

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane con origine in H e siano $A(-b, 0)$, $C(b, 0)$, $B(0, 2h)$, $S(0, h)$. Allora con facili calcoli si trova che

$$HL : \quad bx - hy = 0 \quad (1)$$

$$CS : \quad hx + by - bh = 0 \quad (2)$$

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni (1) e (2) si ottiene che $L \left(\frac{bh^2}{b^2+h^2}, \frac{b^2h}{b^2+h^2} \right)$.

Le rette AL e BL hanno equazioni:

$$AL : \quad bhx - (b^2 + 2h^2)y + b^2h = 0$$

$$BL : \quad (b^2 + 2h^2)x + bhy - 2bh^2 = 0$$

ed essendo

$$bh(b^2 + 2h^2) - bh(b^2 + 2h^2) = 0$$

concludiamo che $AL \perp BL$.

□