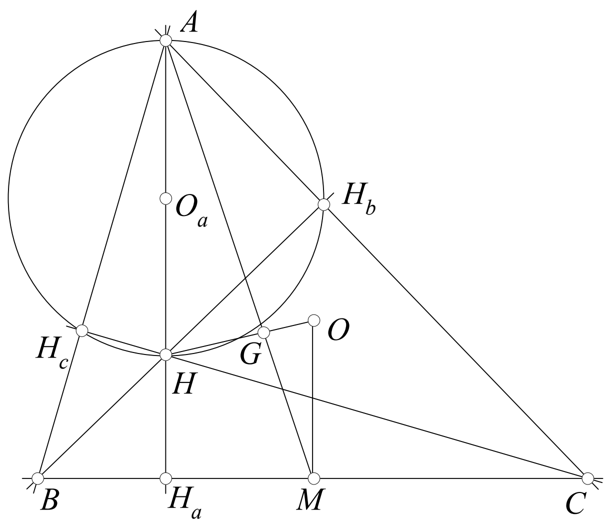
Problema 593 de triánguloscabri. *Dado el triángulo ABC, sean H_a, H_b, H_c los pies de las alturas trazadas desde los vértices A, B, C respectivamente. Si denotamos por r, R, t_a, t_b, t_c el inradio de ABC y los circunradios de los triángulos ABC, H_bAH_c, Ha_BH_c, H_aH_bC, demostrar que*

$$3r \leqslant t_a + t_b + t_c \leqslant 3R.$$

Propuesto por Ercole Suppa.

Solución de Francisco Javier García Capitán



La figura muestra el caso en que el triángulo es acutángulo. Recordemos sobre ella el concepto de la recta de Euler: Siendo O y G el circuncentro y baricentro, respectivamente, si prolongamos el segmento OG hasta el punto H tal que $OG : GH = 1 : 2$, tendremos que, por ser también $MG : GA = 1 : 2$, los triángulos OGM y HGA son semejantes. Por tanto AH será paralela a OM, y por tanto perpendicular a BC. Como lo mismo puede hacerse con los otros vértices del triángulo resulta que H es el ortocentro del triángulo.

De aquí obtenemos además que es $AH = 2 \cdot OM = 2R\cos A$, ya que $\angle BOC = 2A$. Pero, por ser rectos los ángulos AH_bH y AH_cH, el circuncentro O del triángulo AH_bH_c es el punto medio del segmento AH, de donde resulta que $t_a = R\cos A$, y por tanto, haciendo lo mismo para los otros vértices,

$$t_a + t_b + t_c = R(\cos A + \cos B + \cos C) = R \cdot \frac{R+r}{R} = R + r,$$

y teniendo en cuenta que

$$3r = r + 2r \leqslant r + R \leqslant \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2},$$

obtenemos

$$3r \leqslant t_a + t_b + t_c \leqslant \frac{3R}{2} < 3R.$$

¿Qué ocurre si el triángulo es obtusángulo, con un ángulo obtuso, A por ejemplo? En este caso tendremos $t_a = R|\cos A|$. En este caso tendremos

$$\begin{aligned} t_a + t_b + t_c =& R(|\cos A| + \cos B + \cos C) \\ >& R(\cos A + \cos B + \cos C) = R + r \geq 3r. \end{aligned}$$

Por otro lado tendremos

$$\begin{aligned} t_a + t_b + t_c =& R(|\cos A| + \cos B + \cos C) \\ <& R(|\cos A| + |\cos B| + |\cos C|) = 3R. \end{aligned}$$

La cota no puede ser mejorada, ya que si A se aproxima a 180° y B, C se aproximan a 0°, entonces $-\cos A + \cos B + \cos C$ se aproxima a 3.