

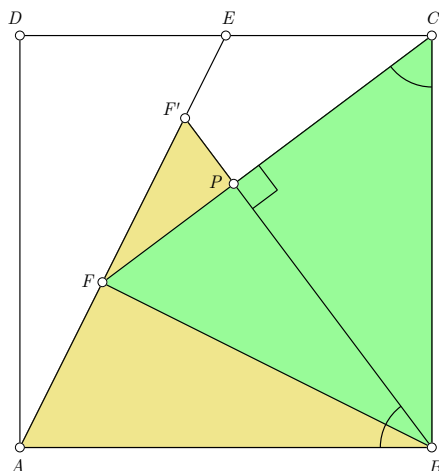
Problema 594.

Sea $ABCD$ un cuadrado de lado a , y ADE un triángulo rectángulo donde E es el punto medio de DC . Probar que existen dos puntos F, F' sobre AE , tales que $CF = BF'$ y que ambos segmentos son perpendiculares.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

Soluzione di Ercole Suppa.

ANALISI.



Supposto il problema risolto, osserviamo che i triangoli $\triangle ABF'$ e $\triangle BFC$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza, in quanto $AB = BC = a$, $BF'CF$ e $\angle ABF' = \angle BCF$ in quanto complementari dello stesso angolo $\angle F'BC$. Pertanto, indicato con P il punto di intersezione di BF e CF , abbiamo:

$$\angle AF'B = \angle BFC = \angle BFP \quad \Rightarrow$$

$$\angle F'FP = 90^\circ - \angle FF'P = 90^\circ - \angle BFP = \angle PBF \quad \Rightarrow$$

$$\angle BFF' = \angle BFP + \angle PFF' = BFP + PBF = 90^\circ \quad \Rightarrow$$

$$BF \perp AE$$

Pertanto i punti F, F' si possono costruire nel modo seguente:

COSTRUZIONE.

- dal punto B tracciare la retta r perpendicolare ad AE e sia $F = r \cap AE$;
- si tracci il segmento CF ;
- dal punto B tracciare la retta s perpendicolare ad CF e sia $F' = s \cap CF$.

DIMOSTRAZIONE.

Per costruzione $BF' \perp CF$. D'altra parte, $AB = BC = a$, $\angle ABF' = \angle BCF$ (in quanto complementari dello stesso angolo $\angle F'BC$) e, invertendo il ragionamento svolto nell'analisi, si dimostra facilmente che $\angle BFC = \angle AF'B$. Pertanto i triangoli $\triangle ABF'$ e $\triangle BFC$, avendo un lato e due angoli congruenti, sono congruenti per il secondo criterio. Ne segue che $BF' = CF$. $\square$