Problema 594. *Sea ABCD un cuadrado de lado a, y ADE un triángulo rectángulo donde E es el punto medio de DC. Probar que existen dos puntos F, F´ sobre AE, tales que CF=BF´ y que ambos segmentos son perpendiculares.*

Romero, J. B. (2010): Comunicación personal.

Siendo A(0, 0), B(0, a), C(a, a), D(a, 0), E(a, a/2), F(b, b/2) y F'(c, c/2)

Se impone CF=BF'

$$(a-b)^2+\left(a-\frac{b}{2}\right)^2=c^2+\left(a-\frac{c}{2}\right)^2$$

Y acto seguido que ambos segmentos sean perpendiculares

$$-c\cdot(a-b)+\left(a-\frac{c}{2}\right)\cdot\left(a-\frac{b}{2}\right)=0$$

Y la solución a dicho sistema son los dos puntos pedidos

$$b=\frac{2\cdot a}{5}\ \wedge\ c=\frac{4\cdot a}{5}$$

Además, se observa que en este caso CF=BF'=a

$$(a-b)^2+\left(a-\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(a-\frac{2\cdot a}{5}\right)^2+\left(a-\frac{\frac{2\cdot a}{5}}{2}\right)^2$$

$$a^2$$

Si se impone sólo la condición CF=BF', existen infinitas soluciones

$$b=\frac{6\cdot a-\sqrt{(16\cdot a^2-20\cdot a\cdot c+25\cdot c^2)}}{5}\ \vee\ b=\frac{\sqrt{(16\cdot a^2-20\cdot a\cdot c+25\cdot c^2)}+6\cdot a}{5}$$

Nicolás Rosillo, 3 de noviembre de 2010

P.S. Existe otra solución al problema con b=2a y c=0, puntos que descansan sobre las prolongaciones de AE.