Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

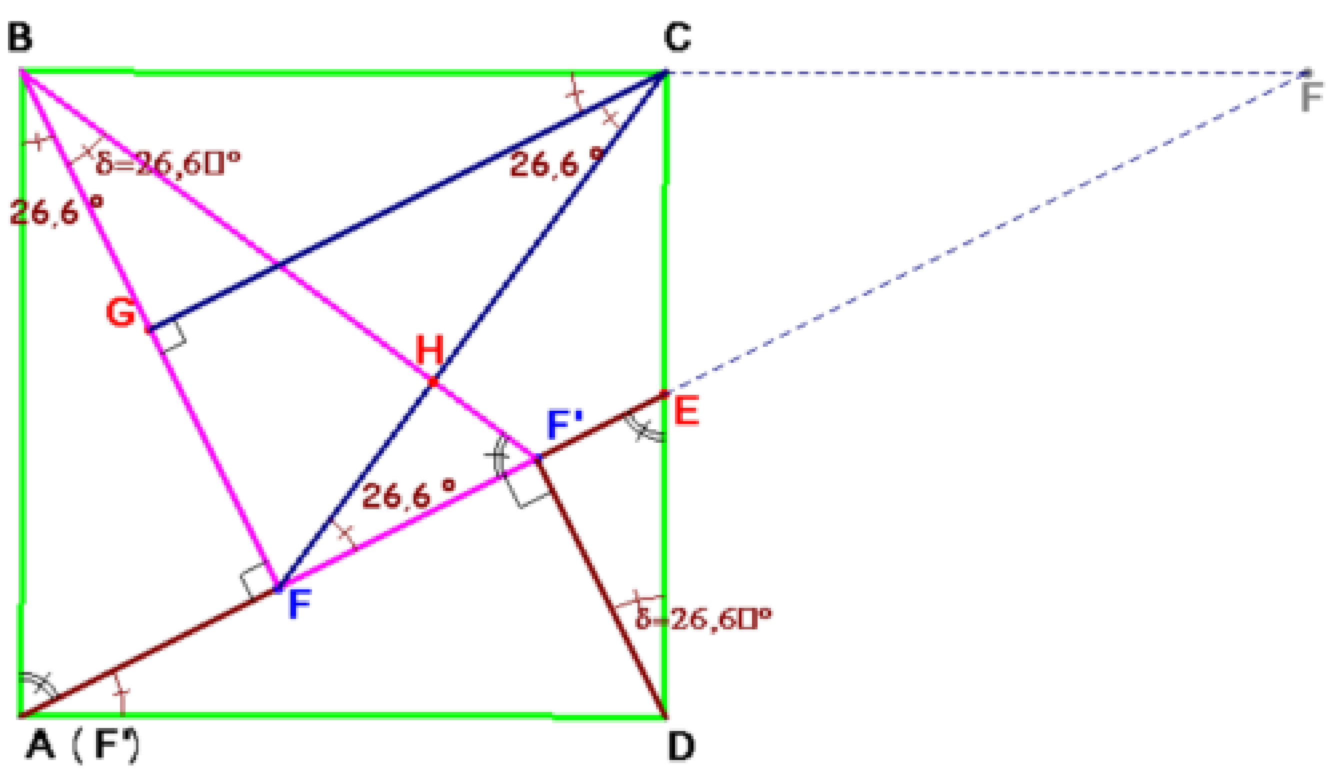
Problema 594.- *Sea $ABCD$ un cuadrado de lado a, y ADE un triángulo rectángulo donde E es el punto medio de DC. Probar que existen dos puntos F, F' sobre AE, tales que $CF= BF'$ y que ambos segmentos son perpendiculares.*

Romero, J. B. (2010): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S. *Fray Luis de León* (Salamanca).

Trazo desde B y D sendas perpendiculares a AE que cortan en los puntos F y F respectivamente. Estos van a ser los puntos buscados.

En efecto: Desde C trazo una paralela a AE que intercepta BF en G. Tengo los triángulos rectángulos congruentes $DF'A$, AFB y BGC (y más adelante, también FGC) todos ellos semejantes a $EF'D$ (razón 2). La semejanza entre $DF'A$ y $EF'D$ nos da que los catetos DF' y EF' son uno el doble que el otro y así en todos ellos.



Si $GC = FB = 2GB$ resulta que el triángulo BCF es isósceles y por tanto $CF = CB$ (1)

Si $BF = AF' = 2AF$ se obtiene que también es isósceles ABF' y por tanto $AB = F'B$ (2)

De las relaciones (1) y (2) resulta $F'B = CF$. Sólo queda por probar la perpendicularidad.

Como BCF es isósceles, el triángulo FGC también es congruente con los $DF'A$, AFB, ... etc. Por ser paralelos FF' y GC $\measuredangle F'FH = \delta = \measuredangle FCG$ y $\measuredangle FF'H = 90 - \delta$ (en el triángulo BFF'), es el complementario de éste último. Por tanto el triángulo $F'HF$ es rectángulo en H (también semejante a los anteriores) y CF y BF' son perpendiculares.

Otra solución se obtiene tomando el simétrico de B respecto de C como F y el punto A como F', de forma trivial. ■