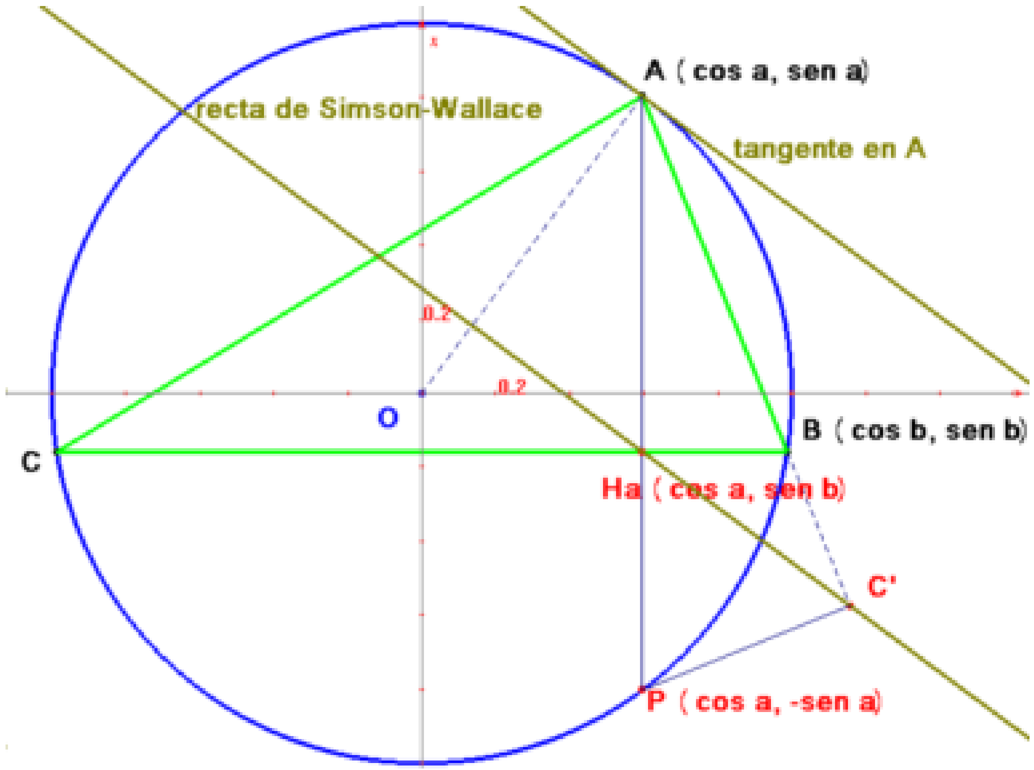
***Problema* 595**

(v)*La altura AH_a de un triángulo ABC interseca a la circunferencia circunscrita a ABC en P. La recta de Simson de P respecto a ABC es paralela a la recta tangente por A a la circunferencia circunscrita.*

D'Ignazio, I. y Suppa, E. (2001): Il problema geometrico dal compasso al cabri. Interlinea Editrice. Téramo. (p. 276).

Los autores del libro me lo regalaron, lo que les agradezco profundamente. El profesor Italo D'Ignazio falleció hace unos meses y se le dedicó un homenaje en la revista.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S *Fray Luis de León* de Salamanca.

Tomamos el circuncentro como origen de coordenadas y el eje de abscisas paralelo a uno de los lados. Suponemos además que la circunscrita tiene radio unidad. Las coordenadas de los puntos que intervienen son las que aparecen en la figura. Vamos a calcular la ecuación de la recta de Simson-Wallace de P. AB es la recta de ecuación:

$$y = sen\ a + \frac{sen\ b - sen\ a}{\cos b - \cos a}\ (x - \cos a)$$

Usando las identidades trigonométricas adecuadas para transformar las diferencias de senos y cosenos en productos (si $\cos b = \cos a$ el problema no tiene sentido), esta ecuación puede ponerse como: $y = sen\ a - \ cot\left(\frac{a+b}{2}\right)\ (x - \cos a)$ (1)

La perpendicular a ésta desde el punto P tiene por ecuación:

$$y = -sen\ a + \ tg\left(\frac{a+b}{2}\right)\ (x - \cos a) \quad (2)$$

El punto C' de intersección de estas rectas, y por tanto, de la recta de Simson-Wallace, se obtiene resolviendo –pacientemente- el sistema formado por estas dos rectas; es el de coordenadas:

$C' = \ (\cos a + sen\ a \cdot sen(a+b), -sen\ a \cdot \cos(a+b))$

Para resolver el problema debemos ver que los vectores OA y $C'H_a$ son perpendiculares. $OA = (\cos a, \text{sen}\ a)$; $C'H_a$= $(-sen\ a \cdot sen(a+b), sen\ b + sen\ a \cdot \cos(a+b))$.

La segunda coordenada de $C'H_a$ es: $sen\ b + sen\ a \cdot \cos(a+b) = sen\ b \cdot (1 - sen^2 a) + sen\ a \cdot \cos a \cdot cos\ b = \cos a \cdot sen\ (a+b)$ y por tanto $C'H_a$ $= sen(a+b)(-sen\ a, \cos a)$ que es, claramente, perpendicular a OA. Y con esto termina la demostración. ■