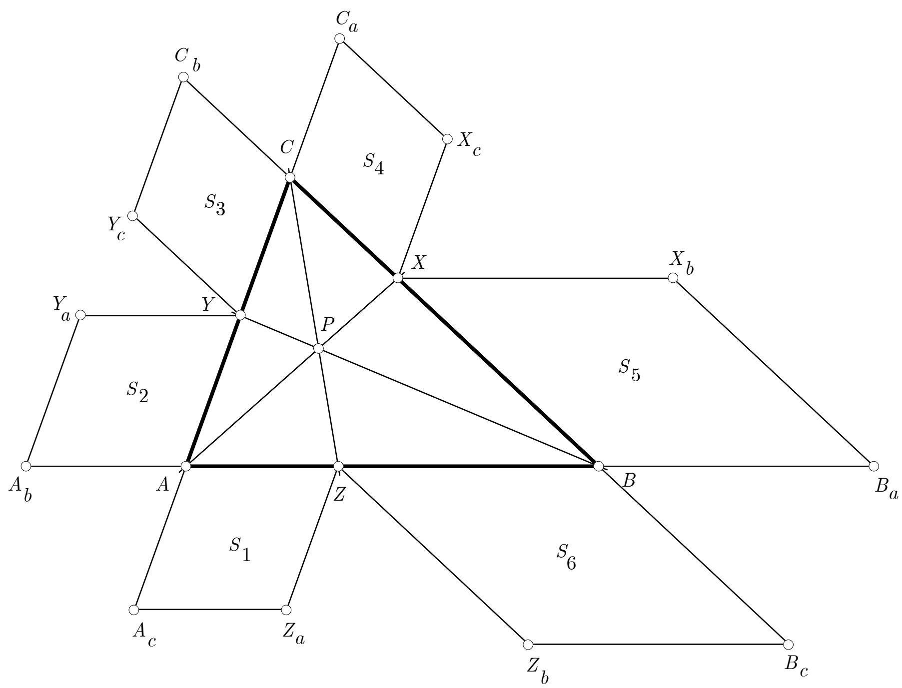
Problema 596.

Sea un P punto interior al triángulo ABC, con su triángulo correspondiente ceviano XYZ. Se hacen las construcciones de todos los rombos indicados en la figura.



Denotamos por S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, el área de cada uno de los rombos AZZ_aA_c, AYY_aA_b, CYY_cC_b, XCC_aX_c, XBB_aX_b, ZBB_cZ_b, respectivamente. Probar que se verifica la relación entre las áreas siguientes:

$$S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6$$

si y sólo si AX, BY, CZ, concurren en el punto P.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

Soluzione di Ercole Suppa.

Indicando con a, b, c le lunghezze dei lati BC, CA, AB e con x, y, z le lunghezze dei segmenti BX, CY, AZ, abbiamo:

$$\begin{aligned} &S_1 = z^2 \sin A, && S_3 = y^2 \sin C, && S_5 = x^2 \sin B \\ &S_2 = (b-y)^2 \sin A, && S_4 = (a-x)^2 \sin C, && S_6 = (c-z)^2 \sin B \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6 & \qquad \Leftrightarrow \\
x^2y^2z^2 = (b-y)^2(a-x)^2(c-z)^2 & \qquad \Leftrightarrow \\
xyz = (a-x)(b-y)(c-z) & \qquad \Leftrightarrow \\
\frac{x}{a-x} \cdot \frac{y}{b-y} \cdot \frac{z}{c-z} = 1 & \qquad \Leftrightarrow \\
\frac{AX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1 &
\end{aligned}$$

e la conclusione discende dal teorema di Ceva. $\square$