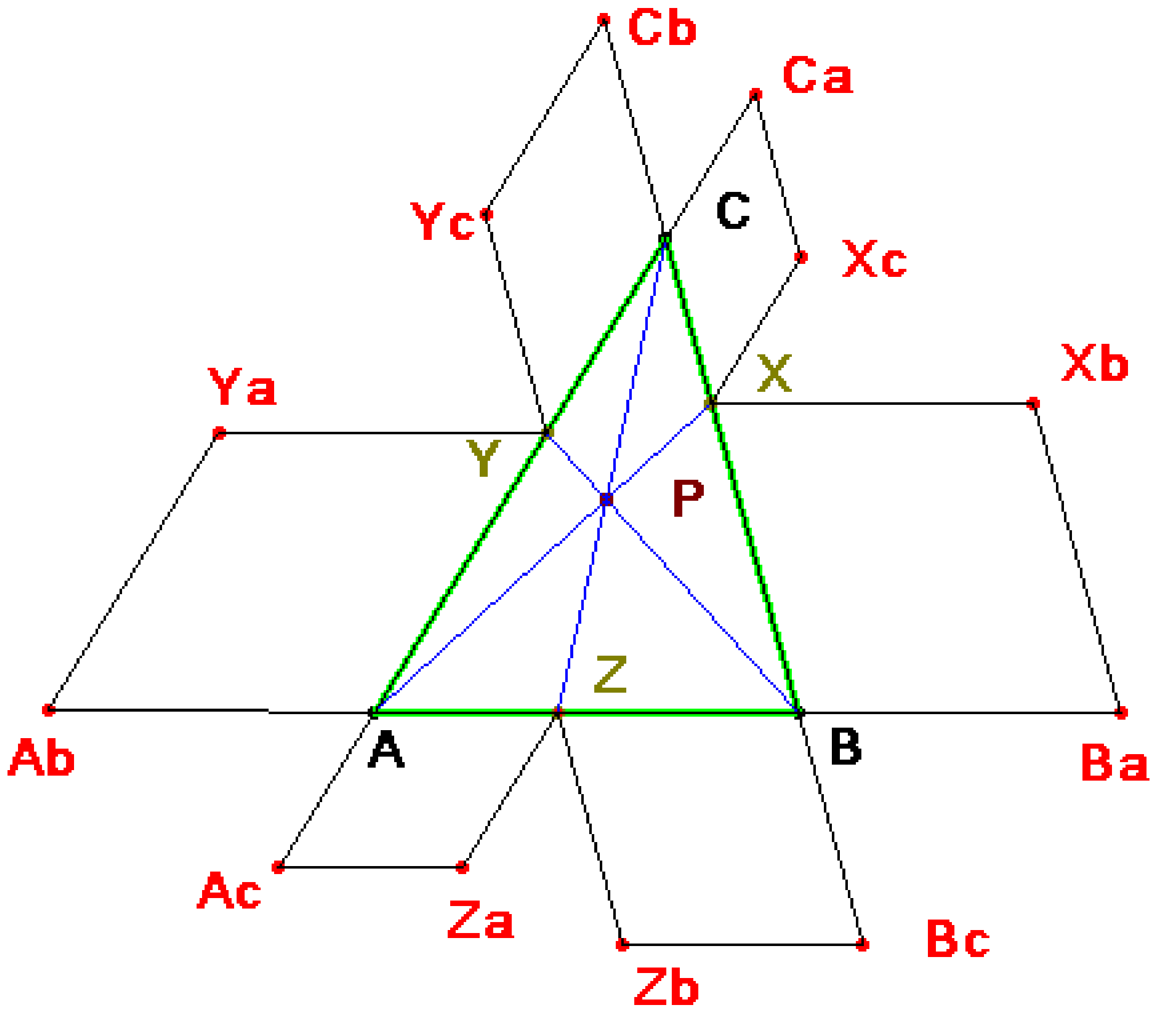
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Problema 596.- *Sea un P punto interior al triángulo ABC, con su triángulo correspondiente ceviano XYZ. Se hacen las construcciones de todos los rombos indicados en la figura.*



Denotamos por S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, el área de cada uno de los rombos AZZ_aA_c, AY_aA_b, CYY_cC_b, XCC_aX_c, XBB_aX_b, ZBB_cZ_b, respectivamente.

Probar que se verifica la siguiente relación entre las áreas:

$S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6$ *si y sólo si AX, BY, CZ, concurren en el punto P.*

Romero, J.B. (2010): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S *Fray Luis de León* de Salamanca.

Se calculan las áreas de los rombos:

$S_1 = 2 \cdot 1/2 \cdot AZ \cdot AA_c \cdot \text{sen}(180\text{-}A) = AZ^2 \cdot \text{sen}\, A$

De igual modo se tienen las siguientes áreas: $S_2 = AY^2 \cdot \text{sen}\, A$; $S_3 = CY^2 \cdot \text{sen}\, C$;

$S_4 = CX^2 \cdot \text{sen}\, C$; $S_5 = BX^2 \cdot \text{sen}\, B$; y por último $S_6 = BZ^2 \cdot \text{sen}\, B$.

Dividiendo los productos impares por los productos pares (o viceversa) se obtiene:

$(ZA/ZB)^2(XB/XC)^2(YC/YA)^2$ que es igual a 1, según el teorema de Ceva, si y sólo si las cevianas AX, BY, CZ son concurrentes en P.