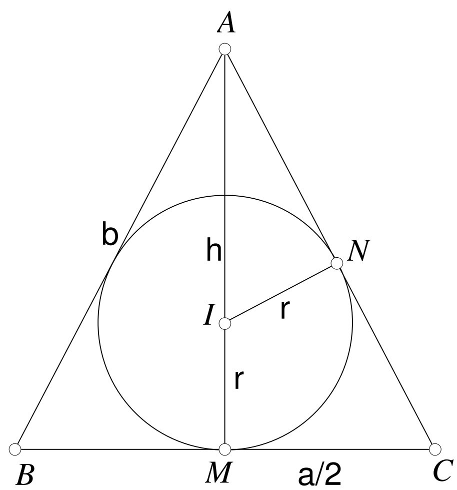
Problema 597 de triánguloscabri (Kvant M556, 1979). *¿Serán necesariamente iguales dos triángulos acutángulos e isósceles, que tengan el mismo radio del círculo inscrito y también iguales los dos pares de lados "laterales"?*

Solución de Francisco Javier García Capitán

Consideremos los triángulos semejantes INA y BMA de la figura:



Tenemos:

$$\frac{h-r}{r}=\frac{b}{\frac{a}{2}}=\frac{2b}{a}\Rightarrow\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=h=\frac{2br}{a}+r=\frac{(2b+a)r}{a}.$$

Teniendo en cuenta la terna pitágorica (3,4,5) podemos considerar el triángulo isósceles con $a=6$ y $b=c=5$, que queda dividido en dos triángulos rectángulos de lados 3, 4 y 5. Para estos valores de a,b,c tenemos que el semiperímetro es $s=8$ y el área es $S=12$, por tanto el radio de la circunferencia inscrita es $r=S/s=3/2$.

Pensando que la respuesta a la pregunta planteada puede ser negativa, podemos investigar si la ecuación

$$\sqrt{5^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{(2\cdot5+a)\cdot\frac{3}{2}}{a}\Leftrightarrow\sqrt{100-a^2}=\frac{3(10+a)}{a}\Leftrightarrow\sqrt{10-a}=\frac{3\sqrt{10+a}}{a}$$

admite alguna solución además de la conocida $a=6$. En efecto tenemos que

$$\sqrt{10-a}=\frac{3\sqrt{10+a}}{a}\Rightarrow10-a=\frac{9a+90}{a^2}\Rightarrow a^3-10a^2+9a+90=0,$$

que admite las soluciones $a=6$ y $a=2+\sqrt{19}$. Por tanto los triángulos <u>no</u> tienen que ser necesariamente iguales.