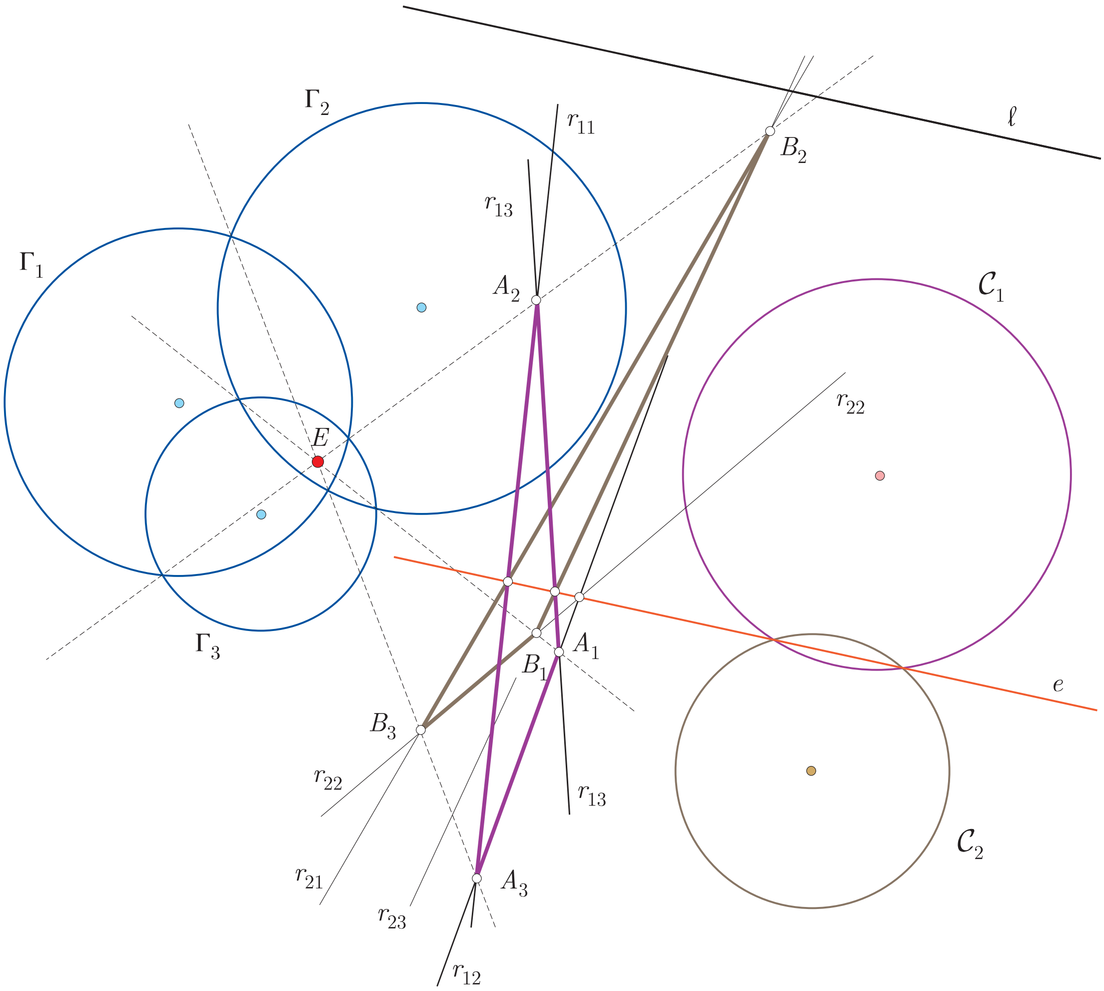
Se tienen tres circunferencias, Γ_1, Γ_2 y Γ_3; trazar los ejes radicales de otras circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ con cada uno de las otras tres primeras circunferencias y demostrar que de las intersecciones resultan dos triángulos homológicos. Hallar el centro y el eje de homología.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **599**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *¿Se tienen tres círculos, O1 O2 O3 ; trazar los ejes radicales de otros círculos H y H´ con cada uno de los otros tres círculos y demostrar que las intersecciones resultan dos triángulos homológicos. Hallar el centro y el eje de homología,*
>
> *Sainz, A. (1941) Euclides. Tomo 1. Num 1. (pag 112)*

—— - ——

Con el fin de hacer algunas consideraciones posteriormente, vamos a hacer una resolución analítica, usando coordenadas baricéntricas homogéneas, referidas a un triángulo $\widehat{ABC}$, cuyos vértices los hacemos coincidir con los centros de las tres primeras circunferencias, Γ_1, Γ_2 y Γ_3.



La ecuación de la circunferencia de centro en A y radio ρ_1 es:

$$\Gamma_1 : \ a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x+y+z)\left(\rho_1^2 x - (c^2-\rho_1^2)y - (b^2-\rho_1^2)z\right) = 0.$$

Las ecuaciones de las circunferencias Γ_2 y Γ_3, centradas en B y C y de radios respectivos ρ_2 y ρ_3, resultan de permutar cíclicamente la de Γ_1, en las variables x, y, z; a, b, c; ρ_1, ρ_2, ρ_3.

El centro radical de las tres circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3 es el punto de coordenadas baricéntricas:

$$\boxed{E\left(a^4 - a^2(b^2+c^2-2\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2) + (b^2-c^2)(\rho_3^2-\rho_2^2) : \cdots : \cdots\right)} \qquad (1)$$

Las ecuaciones generales de las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se pueden poner en la forma:

$$\mathcal{C}_i:\ a^2yz+b^2zx+c^2xy+(x+y+z)(p_ix+q_iy+r_iz)=0, \quad (i=1,2),$$

El <u>eje radical</u> de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es:

$$\boxed{e:\ (p_1-p_2)x+(q_1-q_2)y+(r_1-r_2)z=0} \tag{2}$$

La intersección de los ejes radicales r_{12} y r_{13} de $\mathcal{C}_1$ con las circunferencias Γ_2 y Γ_3, respectivamente, nos da el punto:

$$\begin{gathered} A_1\big(-a^4-a^2(q_1+r_1-\rho_2^2-\rho_3^2)+(q_1-r_1)(\rho_2^2-\rho_3^2): \\ a^2b^2+a^2p_1+(b^2-c^2)r_1-(b^2+p_1-r_1)\rho_2^2+(c^2-a^2+p_1-r_1)\rho_3^2: \\ a^2c^2+a^2p_1+(c^2-b^2)q_1+(b^2-a^2+p_1-q_1)\rho_2^2-(c^2+p_1-q_1)\rho_3^2\big). \end{gathered}$$

Procediendo cíclicamente, obtenemos los puntos B_1 y C_1 de intersección de los eje radicales r_{13} y r_{11} de $\mathcal{C}_1$ con las circunferencias Γ_3 y Γ_1, por una parte, y r_{11} y r_{12} con Γ_1 y Γ_2.

Similarmente, cuando se parte de la circunferencia $\mathcal{C}_2$, se obtienen los puntos A_2, B_2 y C_2, sin mas que cambiar en las coordenadas de A_1, B_1 y C_1, p_1, q_1, r_1 por p_2, q_2, r_2.

La recta A_1A_2 es:

$$(b^2-c^2+\rho_2^2-\rho_3^2)x+(a^2+\rho_2^2-\rho_3^2)y-(a^2-\rho_2^2+\rho_3^2)z=0.$$

Por permutación cíclica, se obtienen las ecuaciones de las rectas B_1B_2 y C_1C_2; siendo el punto común de las tres el centro radical E (1) de las circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3.

Esto quiere decir que los triángulo $\widehat{A_1B_1C_1}$ y $\widehat{A_2B_2C_2}$ son perspectivos, cuyo eje de perspectividad está determinado por los puntos $A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_2A_3 \cap B_2B_3$ y $A_3A_1 \cap B_3B_1$, que es el eje radical e (2) de las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

— — — — — — — — — — —

Algunas consideraciones sobre la RECTA LÍMITE de las homologías asociadas a las circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

La homología de centro E (1), eje la recta e (2) y que transforma el triángulo $\widehat{A_1B_1C_1}$ en el $\widehat{A_2B_2C_2}$, tiene recta límite [(1)]:

$$\begin{gathered} \ell:\ \underset{\substack{abc\,xyz\,p_iq_ir_i\\ \rho_1\rho_2\rho_3}}{\mathfrak{S}} \Big(a^4(p_1-\rho_1^2)+b^4(p_1-p_2+q_2-\rho_2^2)+c^2(-r_2\rho_1^2+p_2\rho_2^2-r_2\rho_2^2-p_2\rho_3^2+2r_2\rho_3^2+c^2(p_1-p_2+r_2-\rho_3^2)+q_2(\rho_1^2-\rho_3^2))+ \\ a^2(2p_2\rho_1^2-q_2\rho_1^2-r_2\rho_1^2-p_2\rho_2^2+r_2\rho_2^2+b^2(-2c^2-2p_1+p_2-q_2+\rho_1^2+\rho_2^2)-p_2\rho_3^2+q_2\rho_3^2+c^2(-2p_1+p_2-r_2+\rho_1^2+\rho_3^2)) \\ -b^2(-r_2\rho_1^2+p_2\rho_2^2+r_2\rho_2^2-p_2\rho_3^2+c^2(2p_1-2p_2+q_2+r_2-\rho_2^2-\rho_3^2)+q_2(\rho_1^2-2\rho_2^2+\rho_3^2))\Big)x=0. \end{gathered}$$

Si expresamos la circunferencia $\mathcal{C}_2$ como una circunferencia de centro en $Q(\alpha:\beta:\gamma)$ y radio ρ:

$$\begin{gathered} a^2yz+b^2zx+c^2xy- \\ (x+y+z)\left(\left(\frac{c^2\beta^2+2S_A\beta\gamma+b^2\gamma^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}-\rho^2\right)x+\left(\frac{c^2\alpha^2+2S_B\alpha\gamma+a^2\gamma^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}-\rho^2\right)y+\left(\frac{b^2\alpha^2+2S_C\alpha\beta+a^2\beta^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}-\rho^2\right)z\right)=0, \end{gathered}$$

tal <u>recta límite</u> tiene la expresión siguiente, que <u>no depende del radio ρ</u> de la circunferencia $\mathcal{C}_2$, sólo depende del punto $Q(\alpha:\beta:\gamma)$ en donde esté centrada:

$$\begin{gathered} \ell:\ (c^2\beta+b^2\gamma+p_1(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\rho_1^2-\beta\rho_2^2-\gamma\rho_3^2)x+(c^2\alpha+a^2\gamma+q_1(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\rho_1^2-\beta\rho_2^2-\gamma\rho_3^2)y+ \\ (b^2\alpha+a^2\beta+r_1(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\rho_1^2-\beta\rho_2^2-\gamma\rho_3^2)z=0 \end{gathered}$$

---

(1) La recta límite de una homología de la que se conocen el centro, el eje y un par de puntos homólogos $A_1 \mapsto B_1$, se puede construir trazando la recta perpendicular por a B_1 al eje; la recta que pasa por su pie y por A_1 corta, en un punto de la recta límite, a la perpendicular al eje por el centro. La recta límite es paralela al eje.

El lugar de los puntos $Q(\alpha:\beta:\gamma)$ que están en la recta límite común en las homologías que transforman el triángulo $\overset{\frown}{A_1B_1}C_1$ en el $\overset{\frown}{A_2B_2}C_2$, cuando se toman fijas las circunferencias Γ_1, Γ_2, Γ_3 y $\mathcal{C}_1$, es la cónica [2]:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{\substack{abc\,xyz\,p_1q_1r_1\\ \rho_1\rho_2\rho_3}} \left((p_1-\rho_1^2)x^2+(2a^2+q_1+r_1-\rho_2^2-\rho_3^2)yz\right)=0.$$

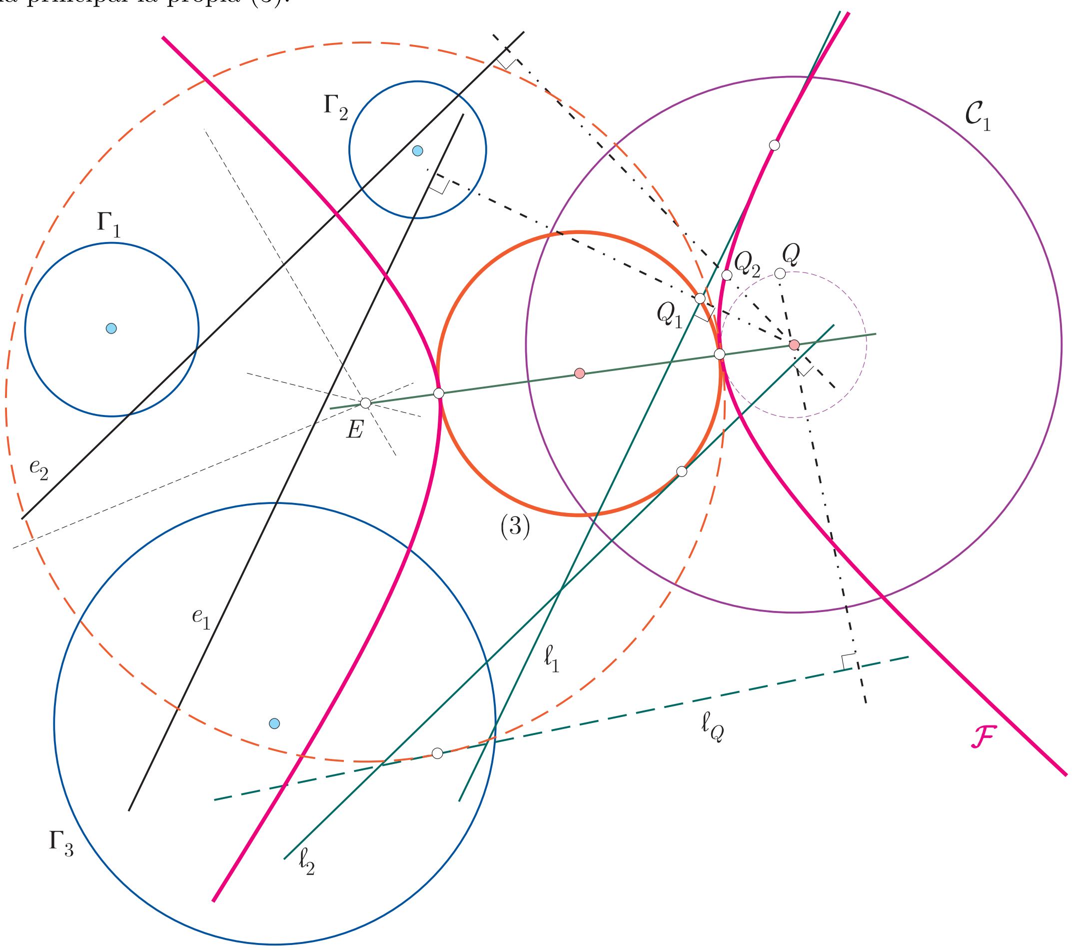
Realmente, se trata de una circunferencia, cuya ecuación se puede expresar de la forma:

$$\boxed{a^2yz+b^2zx+c^2xy+\tfrac{1}{2}(x+y+z)\left((p_1-\rho_1^2)x+(p_2-\rho_2^2)y+(p_3-\rho_3^2)z\right)=0} \qquad (3)$$

Su centro es el punto medio del centro radical E de las circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3 y del centro [3] de la circunferencia $\mathcal{C}_1$:

$$\left(2a^4-a^2(2b^2+2c^2+2p_1-q_1-r_1-2\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)+(b^2-c^2)(q_1-r_1-\rho_2^2+\rho_3^2):\cdots:\cdots\right).$$

• Las rectas limite ℓ_1, que se obtienen cuando el punto $Q_1(\alpha:\beta:\gamma)$ recorre la circunferencia (3) envuelven la cónica $\mathcal{F}$ de focos el centro de la circunferencia $\mathcal{C}_1$ y el centro radical E de las circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3, y con circunferencia principal la propia (3).



• Las rectas limite ℓ_2, que se obtienen cuando el punto $Q_2(\alpha:\beta:\gamma)$ recorre la cónica $\mathcal{F}$ son tangentes a la circunferencia (3).

• La envolvente de las rectas límites cuando el punto $Q(\alpha:\beta:\gamma)$ recorre una circunferencia concéntrica con $\mathcal{C}_1$ es una circunferencia centrada en el centro radical E de las circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3. En particular, si la circunferencia que recorre Q es tangente a la (3), la circunferencia envolvente también es tangente a ambas, con el punto de tangencia coincidente.

• En el caso que las cuatro circunferencias Γ_1, Γ_2, Γ_3 y $\mathcal{C}_1$ tengan radio cero, es decir, se reduzcan a sus centros A, B, C y $P(p:q:r)$ (los ejes radicales son las mediatrices de los segmentos que unen estos puntos), la circunferencia

[2] La recta límite no es tangente a esta cónica, ya que si bien la correspondencia $(\alpha:\beta:\gamma)\mapsto \ell$ es una correlación, no se trata de una polaridad, en general: la correlación no es involutiva o su matriz asociada no es simétrica.
[3] El centro de $\mathcal{C}_1$ es el punto de coordenadas $\left(a^4-a^2(b^2+c^2+2p_1-q_1-r_1)+(b^2-c^2)(q_1-r_1):\cdots:\cdots\right)$.

(3) toma la forma:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{(x+y+z)}{2(p+q+r)^2}\left((c^2q^2+2S_Aqr+b^2r^2)x+(c^2p^2+2S_Bpr+a^2r^2)y+(b^2p^2+2S_Cpq+a^2q^2)z\right)=0. \tag{4}$$

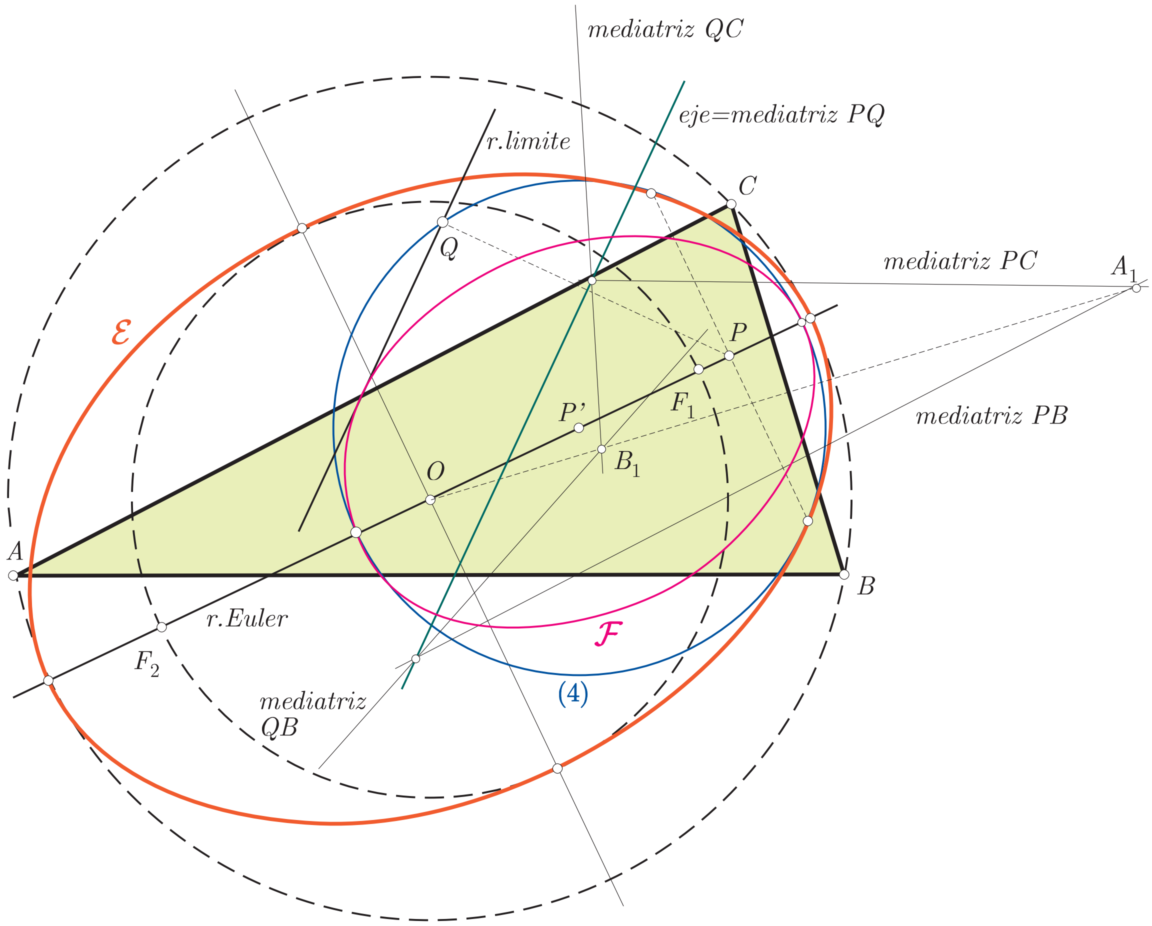
Su centro es el punto medio P' del circuncentro [4] O de $\widehat{ABC}$ y el punto $P(p:q:r)$.

Si hacemos que $P(p:q:r)$ recorra la recta de Euler, la envolvente $\mathcal{E}$ de las circunferencias (4) es la cónica:

$$\underset{S_AS_BS_C}{\overset{abc;\,xyz}{\mathfrak{S}}}\ (b^2-c^2)^2S_A^2-(3a^8-3a^6(b^2+c^2)-3a^4(b^4-3b^2c^2+c^4)+3a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)-b^2c^2(b^2-c^2)^2)yz=0,$$

que es la elipse con eje focal la recta de Euler, con centro en el circuncentro y semiejes de longitudes R y $R/\sqrt{2}$ (R es el radio de la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$). Los puntos de contacto de cada circunferencia con la envolvente están en la perpendicular por P a la recta de Euler. El perspector de la elipse es el punto:

$$\left(\frac{a^2}{a^2(S_A^2+S_BS_C)+3S_A(S_B^2+S_C^2)-10S_AS_BS_C}:\dots:\dots\right).$$



Applet CabriJava

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2474.pdf

[4] Las mediatrices de los segmentos AP, BP y CP se cortan en el circuncentro.