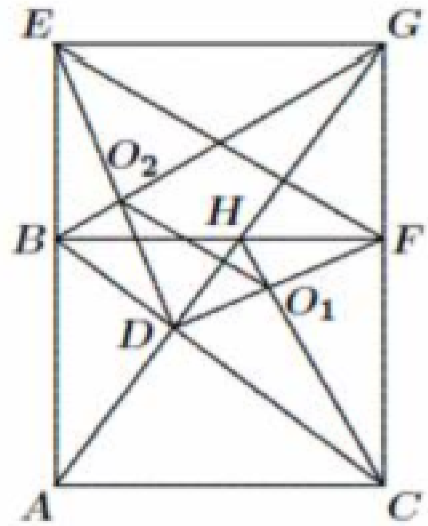
***Problema* 600.-**

2973. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne (consacré à Toshio Seimiya).*

Soit ABC un triangle rectangle non-isocèle d'angle droit en A et tel que $AC > AB$. Soit D le pied de la hauteur abaissée de A sur le côté BC. Soit G le point d'intersection de la droite AD et de la parallèle à AB passant par C. Soit E et F des points tels que $ACGE$ et $BFGE$ forment respectivement des rectangles. Soit H l'intersection de AG et BF. Soit finalement O_1 et O_2 les intersections respectives des diagonales des quadrilatères $CDHF$ et $BDGE$.

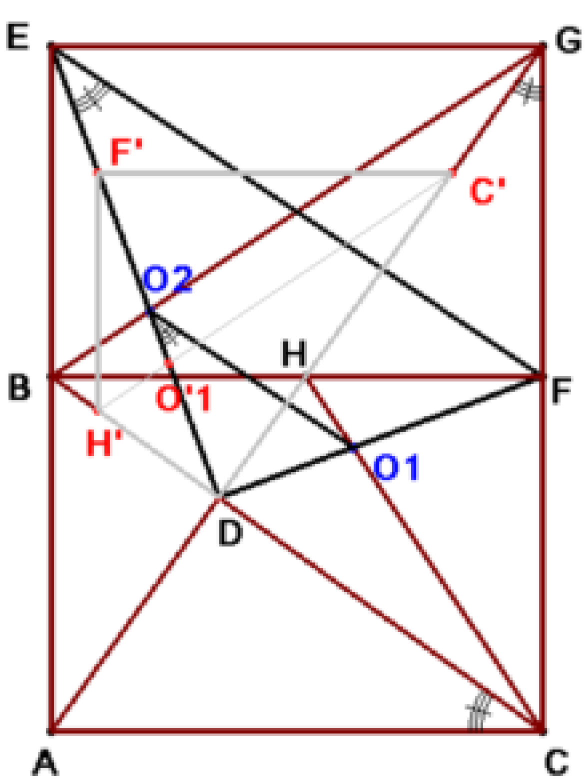
Montrer que les triangles ABC, DFE et DO_1O_2 sont semblables.



Sea ABC un triángulo rectángulo no isósceles con ángulo recto en A, y AC >AB. Sea D el pie de la altura trazada por A al lado BC. Sea G el punto de intersección de la recta AD (extendida) con la recta que contiene a C y es paralela a AB. Sea E el punto tal que ACGE es rectángulo, y sea F el punto tal que BFGE es rectángulo. Sea H el punto de intersección de AG y BF. Sea O_1 la intersección de las diagonales del cuadrilátero CDFH y O_2 la intersección de las diagonales del cuadrilátero BDGE. Probar que los triángulos ABC, DEF y DO_1O_2 son semejantes.

Romero, J. B. (2004): Crux Mathematicorum. Problema 2973 (Dedicado a Toshio Seimiya). Vol 30. N. 6 (p. 369).

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.



La circunferencia circunscrita al rectángulo *BFGE*, también pasa por *D* pues al ser *BD* y *GD* perpendiculares, el cuadrilátero *GDBE* es cíclico. El centro de la misma es el punto medio de *EF*, por tanto el triángulo *EDF* es rectángulo en *D*. Por otra parte los ángulos <*DGF* y <*DEF* son iguales por abarcar el mismo arco y <*DGF* = <*ACB* por tener sus lados perpendiculares. Luego son semejantes los triángulos rectángulos *BAC* y *FDE*.

Los cuadriláteros *FHDC* y *EBDG* son inscriptibles, semejantes y de lados perpendiculares (*H* es el ortocentro de *BCG*), pues tienen dos ángulos rectos opuestos y $\measuredangle DCF = \measuredangle DGE$ por ser complementarios del mismo ángulo. Sus opuestos correspondientes son iguales por ser suplementarios de éstos. Un giro de 90º centrado en *D* transforma el primero en el cuadrilátero *F'H'DC'* (atenuado) homotético del segundo. Las diagonales *DF* y *HC* se transforman en *DF'* y *H'C'* que se cortan en O'_1. O'_1 y O_2 se corresponden en la homotecia así como *F'* y *E*. Se verifica pues $\frac{DO'_1}{DO_2} = \frac{DF'}{DE} = \frac{DF}{DE}$ con lo cual queda probado que los triángulos rectángulos DO_1O_2 y *DFE* son semejantes.