Problema 601 de triánguloscabri. *Sean A_1, A_2, A_3 puntos no colineales sobre la parábola $x^2 = 4my$ $(m > 0)$ y sean $B_1 = l_2 \cap l_3$, $B_2 = l_3 \cap l_1$, $B_3 = l_1 \cap l_2$, donde l_1, l_2, l_3 son las tangentes a la parábola en los puntos A_1, A_2, A_3, respectivamente. Sean $(A_1A_2A_3)$ y $(B_1B_2B_3)$ las áreas de los triángulos correspondientes. Demostrar que $(A_1A_2A_3)/(B_1B_2B_3)$ es una constante y encontrar su valor.*

Arkady Alt (2011): Matematical Reflections, Issue 1, 2011.

Propuesto por Saturnino Campo Ruiz.

Usemos coordenadas baricéntricas, considerando a $A_1A_2A_3$ el triángulo de referencia.

La parábola tendrá una ecuación del tipo $pyz + qzx + rxy = 0$, ya que es una cónica circunscrita al triángulo $A_1A_2A_3$. Además, por tratarse de una parábola, su discriminante es 0. Este discriminante es el de la ecuación cuadrática resultante de resolver el sistema formado por la ecuación de la parábola y la ecuación $x+y+z = 0$ de la recta del infinito. Haciendo cálculos obtenemos que debe ser

$$p^2 + q^2 + r^2 - 2qr - 2rp - 2pq = 0,$$

es decir, el punto $P = (p : q : r)$ pertenece a la elipse inscrita de Steiner.

Por otro lado las rectas tangentes en A_1, A_2, A_3 a la parábola son

$$l_1 : ry + qz = 0, \quad l_2 : pz + rx = 0, \quad l_3 : qx + py = 0,$$

y estas rectas forman el triángulo $B_1B_2B_3$, siendo

$$B_1 = (-p : q : r), \quad B_2 = (p : -q : r), \quad B_3 = (p : q : -r).$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{vmatrix} -p & q & r \\ p & -q & r \\ p & q & -r \end{vmatrix} = pqr \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = pqr \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4pqr,$$

el resultado se deduce de la identidad

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \frac{4pqr}{(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)} \\ =&\frac{(p+q+r)(2qr+2rp+2pq-p^2-q^2-r^2)}{2(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)}, \end{aligned}$$

y el cociente pedido entre las áreas de los dos triángulos es $\frac{1}{2}$.