Problema propuesto por Saturnino Campo Ruiz, profesor del IES Fray Luis de León, de Salamanca
Problema 601
S185.- Sean $A_1;A_2;A_3$ puntos no colineales sobre la parábola $x^2 = 4py$; $p > 0$; y sean $B_1 = l_2 \cap l_3$; $B_2 = l_3 \cap l_1$; $B_3 = l_1 \cap l_2$ donde l_1; l_2; l_3 son las tangentes a la parábola dada en los puntos $A_1;A_2;A_3$; respectivamente. Sean $[A_1A_2A_3]$ y $[B_1B_2B_3]$ las áreas de los triángulos correspondientes. Demostrar que $[A_1A_2A_3]/[B_1B_2B_3]$, es una constante y encontrar su valor.
Arkady Alt (2011): Matematical Reflections, 1 (pag2)

Solución de Nicolás Rosillo

Defino la parábola y calculo función tangente a una curva en puntos de abscisa a, b y c.

#1: $f(x) := \frac{x^2}{4 \cdot p}$

#2: $tg(x, a) := y - f(a) - \text{SUBST}\left(\frac{d}{dx} f(x), x, a\right) \cdot (x - a)$

#3: $- \frac{2 \cdot a \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - a^2}{4 \cdot p}$

#4: $tg(x, b)$

#5: $- \frac{2 \cdot b \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - b^2}{4 \cdot p}$

#6: $tg(x, c)$

#7: $- \frac{2 \cdot c \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - c^2}{4 \cdot p}$

Resuelvo los sistemas formados por las intersecciones de las rectas tangentes

#8: $\text{SOLVE}\left(- \frac{2 \cdot a \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - a^2}{4 \cdot p} = 0 \wedge - \frac{2 \cdot b \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - b^2}{4 \cdot p} = 0, [x, y]\right)$

#9: $x = \frac{a + b}{2} \wedge y = \frac{a \cdot b}{4 \cdot p}$

#10: $\text{SOLVE}\left(- \frac{2 \cdot a \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - a^2}{4 \cdot p} = 0 \wedge - \frac{2 \cdot c \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - c^2}{4 \cdot p} = 0, [x, y]\right)$

#11: $x = \frac{a + c}{2} \wedge y = \frac{a \cdot c}{4 \cdot p}$

#12: $\text{SOLVE}\left(- \frac{2 \cdot b \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - b^2}{4 \cdot p} = 0 \wedge - \frac{2 \cdot c \cdot x - 4 \cdot p \cdot y - c^2}{4 \cdot p} = 0, [x, y]\right)$

#13: $x = \frac{b + c}{2} \wedge y = \frac{b \cdot c}{4 \cdot p}$

Calculo los determinantes asociados a las áreas pedidas y realizo su cociente.

#14: $$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{bmatrix}$$

#15: $$\frac{a^2\cdot(c-b)}{4\cdot p} + a\cdot\left(\frac{b^2}{4\cdot p} - \frac{c^2}{4\cdot p}\right) - \frac{b^2\cdot c}{4\cdot p} + \frac{b\cdot c^2}{4\cdot p}$$

#16: $$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 1 & \frac{a+b}{2} & \frac{a\cdot b}{4\cdot p} \\ 1 & \frac{a+c}{2} & \frac{a\cdot c}{4\cdot p} \\ 1 & \frac{b+c}{2} & \frac{b\cdot c}{4\cdot p} \end{bmatrix}$$

#17: $$-\frac{a^2\cdot(b-c) + a\cdot(c^2 - b^2) + b\cdot c\cdot(b-c)}{8\cdot p}$$

#18: $$\frac{\frac{a^2\cdot(c-b)}{4\cdot p} + a\cdot\left(\frac{b^2}{4\cdot p} - \frac{c^2}{4\cdot p}\right) - \frac{b^2\cdot c}{4\cdot p} + \frac{b\cdot c^2}{4\cdot p}}{-\frac{a^2\cdot(b-c) + a\cdot(c^2 - b^2) + b\cdot c\cdot(b-c)}{8\cdot p}}$$

#19: $$2$$