

Problema 601

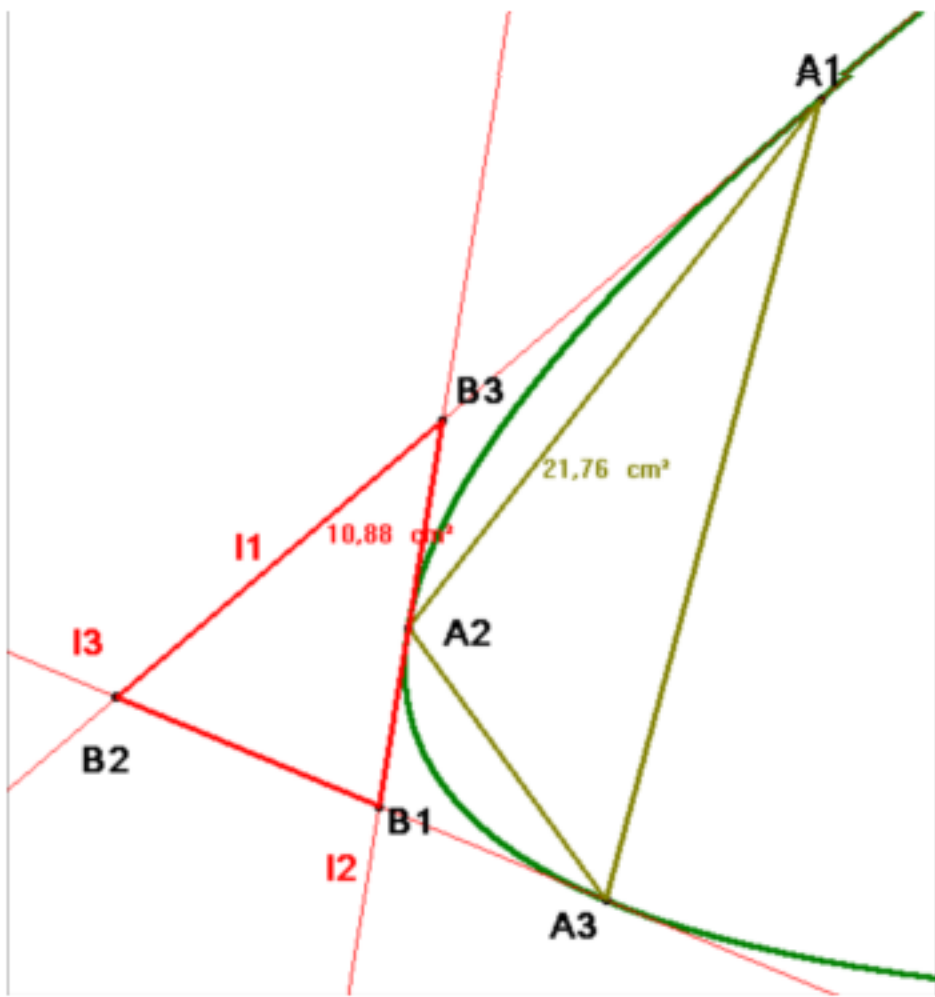
S185.- Sean A_1, A_2, A_3 puntos no colineales sobre la parábola $x^2 = 4py$; $p > 0$; y sean $B_1 = l_2 \cap l_3, B_2 = l_3 \cap l_1, B_3 = l_1 \cap l_2$ donde l_1, l_2, l_3 son las tangentes a la parábola dada en los puntos A_1, A_2, A_3 respectivamente. Demostrar que $[A_1A_2A_3]/[B_1B_2B_3]$ es una constante y encontrar su valor.

Arkady Alt (2011): Mathematical Reflections, 1 (pag2)

Solución de Saturnino Campo Ruiz profesor del I.E.S. Fray Luis de León de Salamanca

Teniendo en cuenta que la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$, el área del triángulo formado por los puntos A_i viene dada por

$$[A_1A_2A_3] = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{8p} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{8p} V(x_1, x_2, x_3) \right|$$



donde $V(x_1, x_2, x_3)$ es el determinante de Van der Monde formado por las abscisas de los vértices.

Para el área del triángulo de las tangentes comenzaremos hallando las coordenadas de sus vértices. Si l_i es la tangente en A_i , su ecuación es $xx_i = 2p(y + y_i)$. La intersección con la tangente l_j en el punto A_j , es el punto B_k , solución del sistema:

$$\begin{cases} xx_i = 2p(y + y_i) \\ xx_j = 2p(y + y_j) \end{cases}$$

$$B_k = \left(2p \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \frac{\begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_i & y_i \end{vmatrix}}{x_i - x_j} \right) =$$

$$\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{\begin{vmatrix} x_j & x_j^2 \\ x_i & x_i^2 \end{vmatrix}}{4p(x_i - x_j)} \right) = \left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{x_i x_j}{4p} \right)$$

Para el área del triángulo formado por las tangentes tendremos:

$$[B_1B_2B_3] = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{x_2 + x_3}{2} & \frac{x_2 x_3}{4p} & 1 \\ \frac{x_3 + x_1}{2} & \frac{x_3 x_1}{4p} & 1 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{x_1 x_2}{4p} & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{16p} \begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_2 x_3 & 1 \\ x_3 + x_1 & x_3 x_1 & 1 \\ x_1 + x_2 & x_1 x_2 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

restando a cada fila la fila 2 se obtiene:

$$[B_1B_2B_3] = \left| \frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)}{16p} \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{16p} V(x_1, x_2, x_3) \right|$$

Por último $\frac{[A_1A_2A_3]}{[B_1B_2B_3]} = 2$. En resumen, el área del triángulo formado por las tangentes es igual a la mitad del área del triángulo inscrito en la parábola. ■