

Problema 1 (Problema 604 de triángulos cabri). *Consideremos un triángulo ABC y un punto D no situado sobre ningún lado. Sea O el punto de intersección de la recta BD con el lado AC ; sea E la intersección de AB y CD y sea F la intersección de AD y BC . Se trazan paralelas desde O a las líneas CD , DA , AB , BC que encuentran a AB , BC , CD , DA en M , N , P y Q , respectivamente. Probar que M , N , P y Q son colineales y que la línea que los contiene es paralela a EF .*

Propuesto por Saturnino Campo Ruiz, a partir del problema S51 de Mathematical Reflections.

Solución de Francisco Javier García Capitán

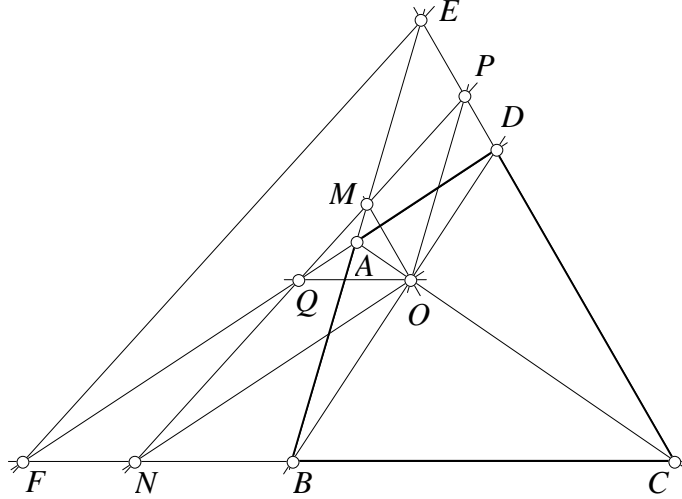


FIGURA 1: $MNPQ$ es paralela a EF .

En primer lugar, modifiquemos el enunciado de forma que sólo aparezcan en él elementos susceptibles de ser transformados proyectivamente, concretamente, todos los elementos de los partiremos serán puntos y rectas, y las operaciones que haremos con ellos, intersección de dos rectas o trazado de la recta que pasa por dos puntos.

Sabemos que trazar una paralela a una recta l por un punto P equivale a unir el punto P con el punto del infinito de la recta l . Por tanto, si llamamos I_{AB} , I_{BC} , I_{CD} , I_{DA} a los puntos del infinito de las rectas AB , BC , CD , DA tendremos que, por ejemplo, el punto M es la intersección de las rectas AB y OI_{CD} .

Teniendo en cuenta esto, si sustituimos la recta del infinito por una recta cualquiera r , obtenemos que el problema propuesto es un caso particular de otro más general:

Problema 2. Sean, en posición general, $ABCD$ un cuadrilátero y r una recta. Sea $O = AC \cap BD$ y sean $I_{AB}, I_{BC}, I_{CD}, I_{DA}$ los puntos de intersección de la recta r y las rectas AB, BC, CD, DA , respectivamente. Llamamos M, N, P, Q a la intersección de las rectas AB, BC, CD, DA con las rectas $OI_{CD}, OI_{DA}, OI_{AB}, OI_{BC}$. Demostrar que los puntos M, N, P, Q están alineados y que la rectas $MNPQ, EF$ y r son concurrentes.

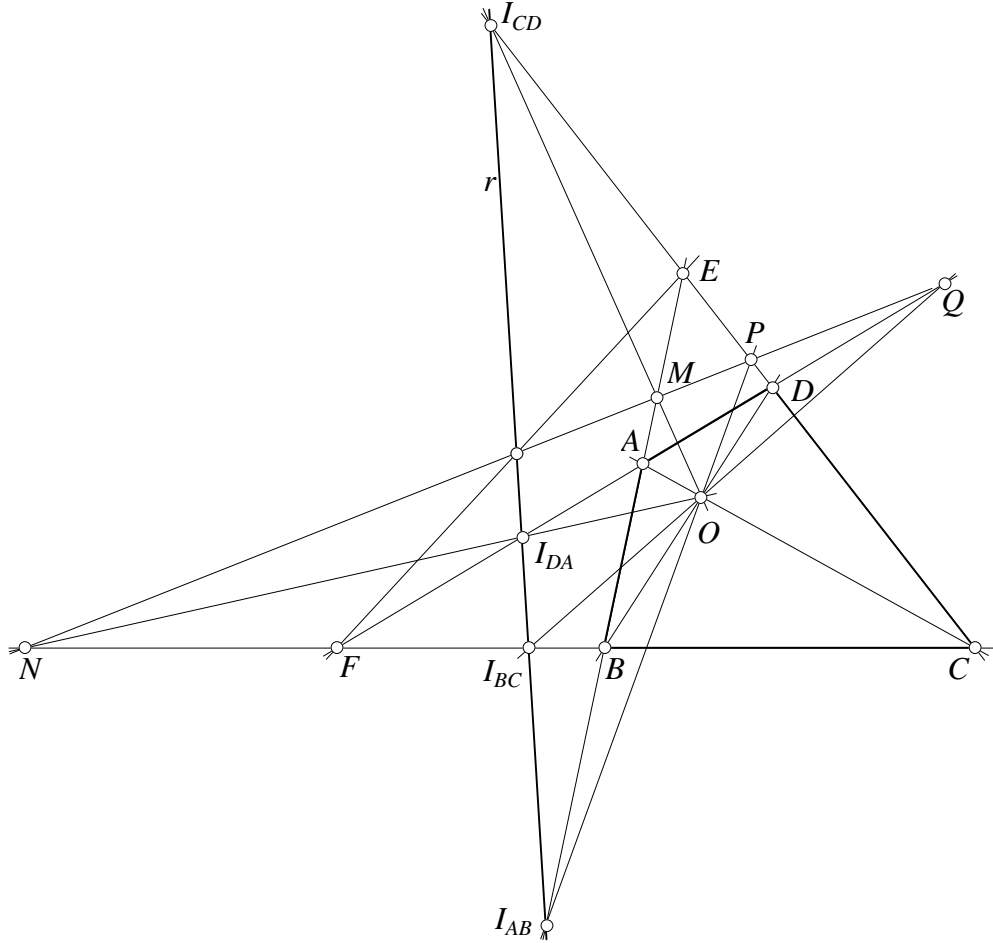


FIGURA 2: $MNPQ, EF$ y r son concurrentes..

Para resolver el problema 2, podemos suponer que EF es la recta del infinito, por lo que el cuadrilátero $ABCD$ se convierte en un rectángulo y O en su centro. Todo lo que tenemos que demostrar es que M, N, P, Q están alineados y que la recta $MNPQ$ es paralela a r .

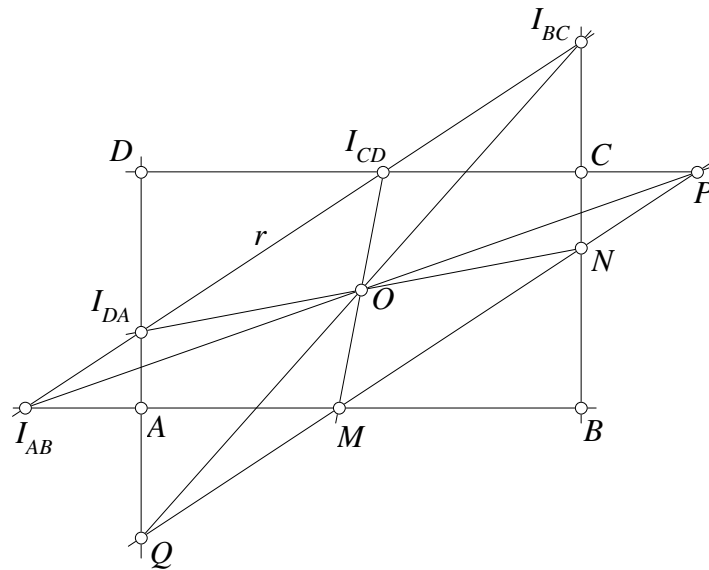


FIGURA 3: $ABCD$ es un rectángulo.

Pero, siendo O el centro del rectángulo, los puntos M, N, P, Q no son otra cosa que los simétricos de $I_{CD}, I_{DA}, I_{AB}, I_{BC}$ respecto de O , por lo que evidentemente estarán alineados y la recta que los contiene es la recta simétrica de r respecto de O , que es paralela a r .