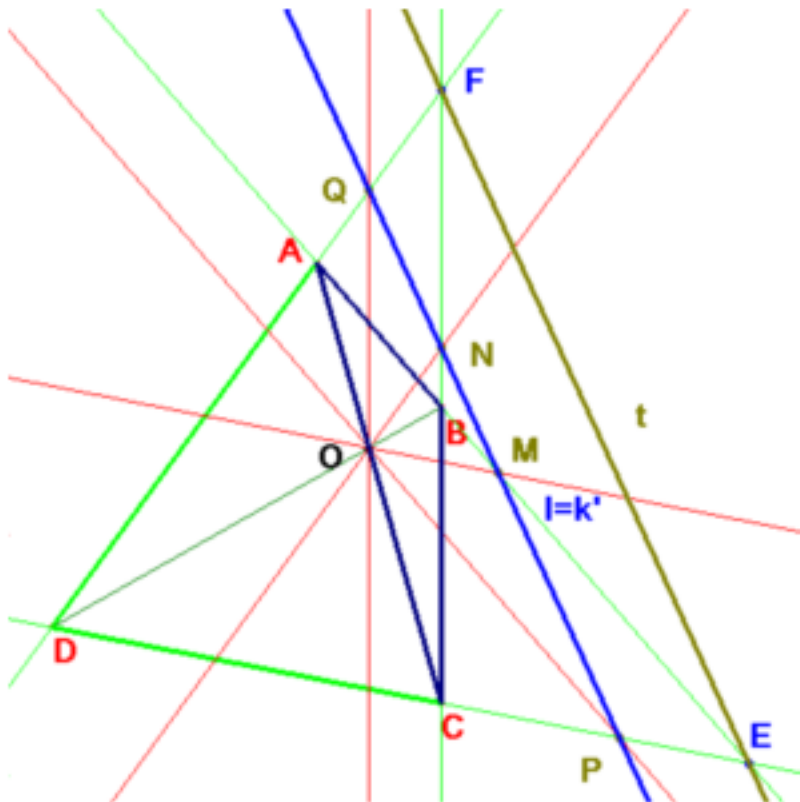


Problema 604.- Consideremos un triángulo ABC y un punto D no situado sobre ningún lado. Sea O el punto de intersección de la recta BD con el lado AC ; sea E la intersección de AB y CD y sea F la intersección de AD y BC . Se trazan paralelas desde O a las líneas CD , DA , AB , BC que encuentran a AB , BC , CD , DA en M , N , P y Q , respectivamente. Probar que M , N , P y Q son colineales y que la línea que los contiene es paralela a EF .

Campo, S. (2011): A partir del problema S51 (Mihai Miculita, Oradea, Romania) de Mathematical Reflections .



Solución de Saturnino Campo Ruiz profesor del I.E.S. Fray Luis de León de Salamanca

Los triángulos ABC y CDA están en perspectiva: las uniones de los vértices correspondientes son concurrentes en el punto O y por tanto las intersecciones de los lados homólogos son colineales (Teorema de Desargues). Son triángulos homólogos.

Sea $\sigma : (A,B,C,O) \rightarrow (C,D,A,O)$ la homología definida. Obviamente $\sigma^2 = I$ (la identidad), σ es una **homología armónica**. El eje es la recta $t=EF$ y O es el centro. Como $\sigma^2 = I$, las dos rectas límite son coincidentes, $l=k'$, $\sigma(l) = r$ y $\sigma(r) = l$, siendo r la recta del infinito. Según las propiedades de las rectas límite, l equidista del centro O y del eje EF y es paralela a éste.

Vamos a ver que los puntos M , N , P y Q pertenecen a la recta límite, y por tanto, colineales, como se desea demostrar.

Sean J el punto del infinito de la línea CB y $OJ=j$. El homólogo de J está sobre la recta OJ , (paralela a CB por O). También está sobre la recta AD , pues la homología transforma CB en AD . Es, por tanto, la intersección de la paralela a CB por O con la recta AD . Así pues J' (homólogo de J) es el punto $Q = \sigma(J) = j \cap \sigma(CB) = j \cap DA$, y M , N , P , $Q \in l=k'$. ■

