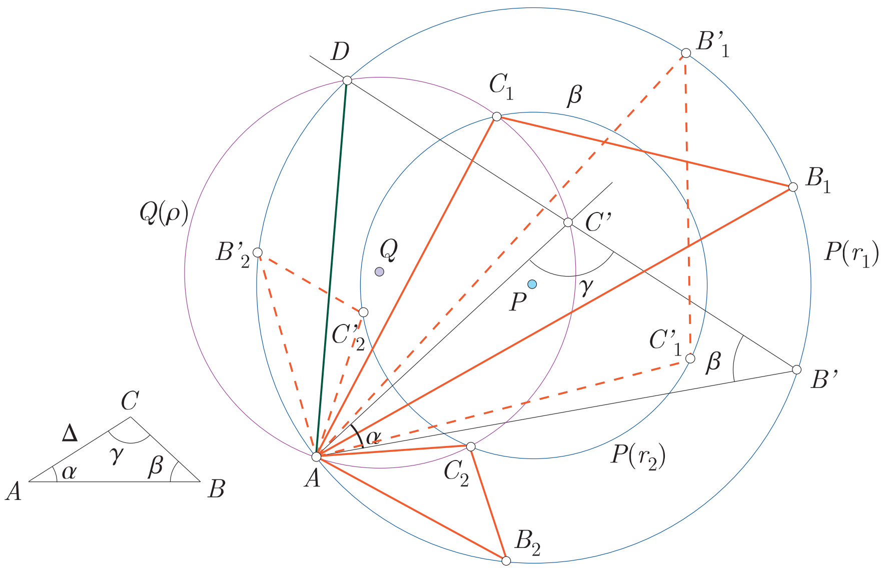
Dadas dos circunferencias concéntricas, trazar un triángulo cuyos ángulos son conocidos y que tengan dos vértices sobre una circunferencia y el tercero sobre la otra.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **605**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *Problema VII*
>
> *Dadas dos circunferencias concéntricas, trazar un triángulo cuyos ángulos son conocidos y que tengan dos vértices sobre una circunferencia y el tercero sobre la otra.*
>
> *Nota del director:*
>
> *Considero que se debe ampliar este problema, haciendo una discusión geométrica acerca de sus soluciones.a)¿cuántas soluciones puede tener?. b)¿En qué casos no tiene solución?*
>
> *Amiot, A. y Desvignes, A. (1891): Solutions raisonèes des problémes (p. 99)*



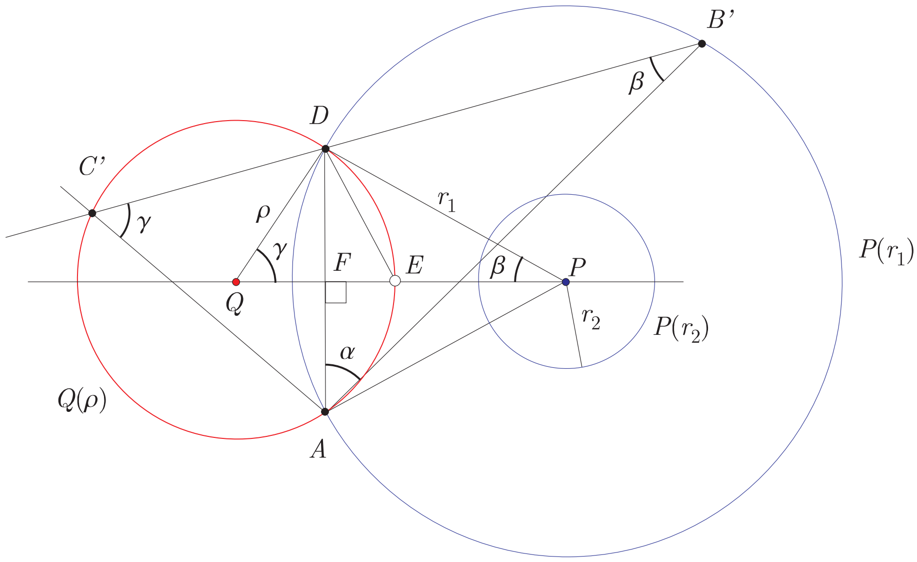
Sean dos circunferencias concéntricas $P(r_1)$ y $P(r_2)$, de centros en P y radios respectivos r_1 y r_2 ($\boxed{r_1 > r_2}$) y un triángulo Δ cuyos ángulos coincidan con los dados, α, β y γ. Tratamos de construir un triángulo $\overset{\frown}{ABC}$ semejante a Δ, con sus vértices A y B en la circunferencia $P(r_1)$, y el vértice C sobre la circunferencia $P(r_2)$.

Tomemos un punto A sobre la circunferencia $P(r_1)$ (¡no importa donde!) y sea otro punto B' sobre la misma circunferencia. Sobre el segmento AB' construimos un triángulo $\overset{\frown}{AB'C'}$ (directamente) semejante a Δ ($\hat{A} = \alpha, \hat{B}' = \beta$ y $\hat{C}' = \gamma$). Al recorrer B' la circunferencia $P(r_1)$, la recta $B'C'$ pasa por un punto fijo D sobre $P(r_1)$, siendo AD segmento sobre el que se describe el arco capaz de amplitud β; y el punto C' describe una circunferencia $Q(\rho)$, que contiene al arco capaz sobre AD correspondiente al ángulo γ.

Si la circunferencia, $Q(\rho)$, que recorre C' corta o es tangente a la circunferencia $P(r_2)$ habrá solución; y, si no, el problema carece de ella.

La condición que deben satisfacer los datos que para haya solución es:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}\right| \leq \frac{r_2}{r_1}.$$



En efecto, para que exista solución, el punto E, sitiado en la circunferencia $Q(\rho)$ y sobre la recta PQ, ha de estar dentro o sobre la circunferencia $P(r_2)$; es decir, $\overline{PE} \leq r_2$. Entonces, la condición enunciada surge de que $\overline{DF} = \rho \operatorname{sen}\gamma = r_1 \operatorname{sen}\beta$ y de:

$$\overline{PE} = \overline{PF} - \overline{FE} = \overline{PF} - (\overline{QE} - \overline{QF}) = r_1 \cos\beta - (\rho - \rho\cos\gamma) = \frac{r_1(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Si esta condición se verifica, se obtienen **dos triángulos** $\widehat{AB_1C_1}$ y $\widehat{AB_2C_2}$, que cumplen con lo pedido. Éstos son iguales si se verifica la igualdad, o sea, si las circunferencia $P(r_2)$ y $Q(\rho)$ son tangentes.

Si tomamos triángulos $\widehat{AB'C''}$, inversamente semejantes a Δ, sobre el segmento AB', es decir, C'' simétrico de C' respecto a AB', se obtienen **otros dos triángulos** $\widehat{AB_1'C_1'}$ y $\widehat{AB_2'C_2'}$, solución, simétricos de los anteriores, respecto a PA.

Si suponemos que $\boxed{r_1 < r_2}$ y exigimos, como antes, que los vértices A y B estén sobre $P(r_1)$ y C sobre $P(r_2)$, razonando de forma similar se llega a que la condición para que exista solución es:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}\right| \geq \frac{r_2}{r_1}.$$

Obteniéndose de nuevo, en estas condiciones, **cuatro soluciones**, al considerar que el triángulo a construir tenga dos vértices en la circunferencia interior.

Finalmente, diremos que si en vez de tomar los dos primeros vértices en la circunferencia interior o en la exterior, alternamos la elección de los vértices del triángulo original, se podrían obtener hasta **DOCE SOLUCIONES**, cuatro para cada una de las condiciones siguientes:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}\right| \leq \frac{r_2}{r_1} \leq \left|\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}\right|, \qquad \left|\frac{\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\right| \leq \frac{r_2}{r_1} \leq \left|\frac{\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\right|,$$

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right| \leq \frac{r_2}{r_1} \leq \left|\frac{\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right|.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2481.pdf