

Problema 606 de triángulos cabri. Sea ABC un triángulo. Denotaremos por K , L y M , respectivamente, los puntos de intersección de las bisectrices interiores por A , B y C con los lados opuestos.

Sea P un punto del perímetro del triángulo KLM y X , Y y Z , respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas por el punto P a los lados BC , CA y AB . Sean U , V y W , respectivamente, los extremos de los vectores $PU = PY + PZ$, $PV = PZ + PX$, $PW = PX + PY$, entonces las rectas AU , BV y CW son concurrentes en un punto Q .

En caso de que P recorra el lado LM , el punto Q está en la hipérbola circunscrita al triángulo ABC , tangente en B y C a las bisectrices interiores y en A a la bisectriz exterior. Situación similar se tiene cuando P recorre los otros lados del triángulo KLM .

Caso particular: Sean P_a , P_b y P_c , respectivamente, los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo KLM con los lados LM , MK y KL y Q_a , Q_b y Q_c los respectivos puntos de concurrencia del párrafo anterior. Entonces, las rectas AQ_a , BQ_b y CQ_c son concurrentes.

Propuesto por Ángel Montesdeoca.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Vamos a resolver este problema usando coordenadas baricéntricas. También usaremos el paquete `baricentricas.nb`, disponible en mi página web.

Sea ABC un triángulo. Denotaremos por K , L y M , respectivamente, los puntos de intersección de las bisectrices interiores por A , B y C con los lados opuestos.

Consideraremos de forma más general que KLM es el triángulo ceviano de un punto arbitrario $S = (u : v : w)$. El problema propuesto corresponde al caso en que S es el incentro I del triángulo ABC . Procediendo de esta forma, no sólo resolveremos el problema propuesto, sino que averiguaremos si el enunciado se cumple para cualquier punto S , o si S debe formar parte de cierto lugar geométrico, que en ese caso aparecerá.

```
<< Baricentricas` ;
ptS = {u, v, w};
{ptK, ptL, ptM} = TrianguloCeviano[ptS];
```

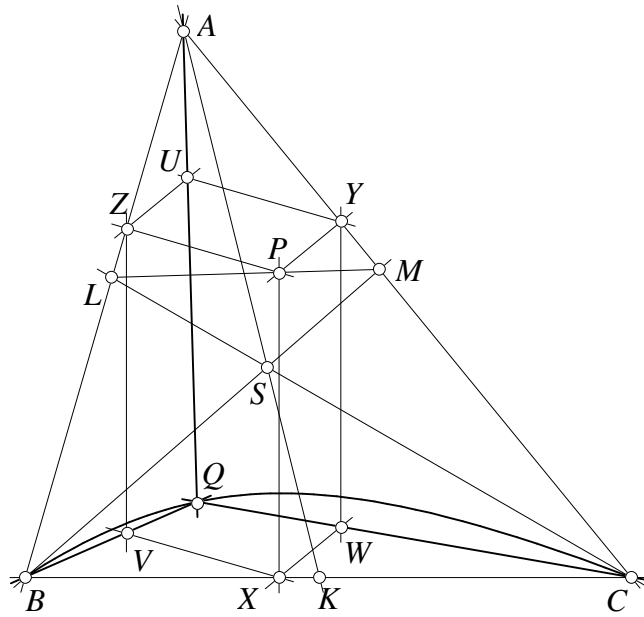
Sea P un punto del perímetro del triángulo KLM y X , Y y Z , respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas por el punto P a los lados BC , CA y AB .

```

ptP = Factor[DividirRazon[ptL, ptM, m, n]]
{ptX, ptY, ptZ} = TrianguloPedal[ptP];
{u (m u + n u + n v + m w), m v (u + w), n (u + v) w}

```

Sean U , V y W , respectivamente, los extremos de los vectores $PU = PY + PZ$, $PV = PZ + PX$, $PW = PX + PY$. Entonces las rectas AU , BV y CW son concurrentes en un punto Q .



Comprobamos la concurrencia de AU, BV, CW y hallamos las coordenadas del punto Q :

```

ptU = Punto[Paralela[ptY, ptP, ptZ], Paralela[ptZ, ptP, ptY]];
ptV = Punto[Paralela[ptZ, ptP, ptX], Paralela[ptX, ptP, ptZ]];
ptW = Punto[Paralela[ptX, ptP, ptY], Paralela[ptY, ptP, ptX]];
PerspectivoConABC[{ptU, ptV, ptW}]

```

True

```

ptQ = Factor[PerspectorConABC[{ptU, ptV, ptW}]]

```

```

{a^2 m n v (u + v) w (u + w),
 b^2 n u (u + v) w (m u + n u + n v + m w), c^2 m u v (u + w) (m u + n u + n v + m w)}

```

¡SORPRESA! Teniendo en cuenta que el conjugado isogonal del punto $(x : y : z)$ es el punto $(a^2yz : b^2zx : c^2xy)$, hemos obtenido que el punto Q es en realidad el conjugado isogonal del punto P .

En caso de que P recorra el lado LM , el punto Q está en la hipérbola circunscrita al triángulo ABC , tangente en B y C a las bisectrices interiores y en A a la bisectriz exterior. Situación similar se tiene cuando P recorre los otros lados del triángulo KLM .

Siendo Q el conjugado isogonal del punto P , resulta que cuando P recorre el lado LM (una recta), su conjugado Q recorrerá una cónica circunscrita al triángulo. Si $S = (u : v : w)$, la ecuación del lado LM es $vwx = uwy + uvz$, y el lugar del punto Q será la cónica $a^2vwy = c^2uvxy + b^2uwxz$.

Podemos ver que la recta $BS : wx - uz = 0$ corta a la cónica en el punto

$$(uv(c^2u^2 - a^2w^2), -b^2u^2w^2, vw(c^2u^2 - a^2w^2)),$$

y este punto se confundirá con B cuando $a : b : c = u : v : w$, es decir cuando S sea el incentro, por tanto BI será tangente a la cónica.

También, si $S = (u : v : w)$, la conjugada armónica de la ceviana AS , es decir la recta que une A con el punto $(0 : -v : w)$ es $wy + vz = 0$, y esta recta vuelve a cortar a la cónica en el punto

$$(a^2v^2w^2, uv(b^2w^2 - c^2v^2), uw(b^2w^2 - c^2v^2)).$$

De nuevo, cuando S sea el incentro del triángulo ABC , este punto se confundirá con el vértice A y la bisectriz exterior, que es la conjugada armónica de la interior, será tangente a la cónica.

Caso particular: Sean P_a , P_b y P_c , respectivamente, los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo KLM con los lados LM , MK y KL y Q_a , Q_b y Q_c los respectivos puntos de concurrencia del párrafo anterior. Entonces, las rectas AQ_a , BQ_b y CQ_c son concurrentes.

En este caso, también optamos por resolver un caso más general, que además resulta más sencillo, porque no tendremos que considerar la circunferencia inscrita al triángulo KLM . En efecto, los puntos P_a , P_b y P_c son los vértices del triángulo ceviano del punto de Gergonne del triángulo KLM . Por tanto, podemos plantearnos si el enunciado es cierto siempre que $P_aP_bP_c$ sea el triángulo ceviano de un punto J respecto del triángulo KLM .

Entonces, consideramos un punto arbitrario $J = (p : q : r)$, comprobamos que AQ_a , BQ_b y CQ_c son concurrentes y hallamos su punto de intersección:

```

ptJ = {p, q, r};
{ptPa, ptPb, ptPc} = TrianguloCeviano[ptJ, {ptK, ptL, ptM}];
{ptQa, ptQb, ptQc} = Map[ConjugadoIsogonal, {ptPa, ptPb, ptPc}];
PerspectivoConABC[{ptQa, ptQb, ptQc}]

True

ptR = Factor[PerspectorConABC[{ptQa, ptQb, ptQc}]]

$$\left\{ -a^2 v w (-r u v - q u w + p v w), -b^2 u w (-r u v + q u w - p v w), \right.$$


$$\left. -c^2 u v (r u v - q u w - p v w) \right\}$$


```