***Problema* 606**

*Sea ABC un triángulo. Denotaremos por K, L y M, respectivamente, los puntos de intersección de las bisectrices interiores por A, B y C con los lados opuestos. Sea P un punto del perímetro del triángulo KLM y X, Y y Z, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas por el punto P a los lados BC, CA y AB.*

*Sean U, V y W, respectivamente, los extremos de los vectores PU=PY+PZ, PV=PZ+PX, PW=PX+PY, entonces las rectas AU, BV y CW son concurrentes en un punto Q. En en caso de que P recorra el lado LM, el punto Q está en el la hipérbola circunscrita al triángulo ABC, tangente en B y C a las bisectrices interiores y en A a la bisectriz exterior. Situación similar se tiene cuando P recorre los otros lados del triángulo KLM.*

Caso particular: *Sean $P_a$, $P_b$ y $P_c$, respectivamente, los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo KLM con los lados LM, MK y KL y $Q_a$, $Q_b$ y $Q_c$ los respectivos puntos de concurrencia del párrafo anterior. Entonces, las rectas $AQ_a$, $BQ_b$ y $CQ_c$ son concurrentes.*

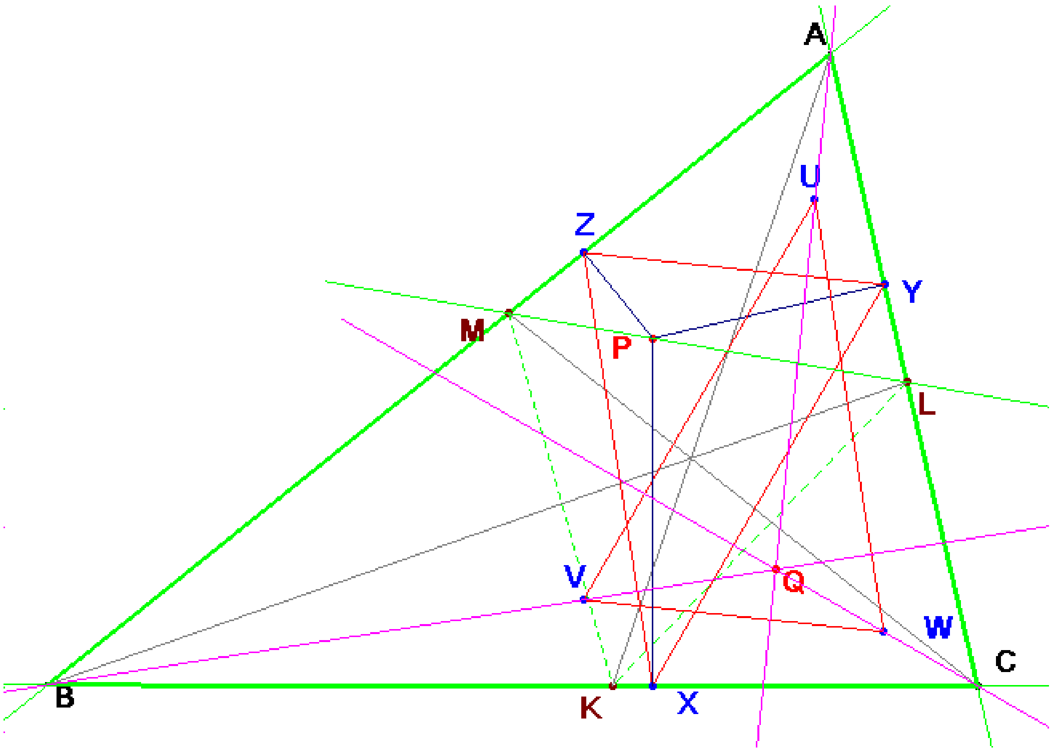
Montesdeoca, A. (2011): Comunicación personal.

**Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.**

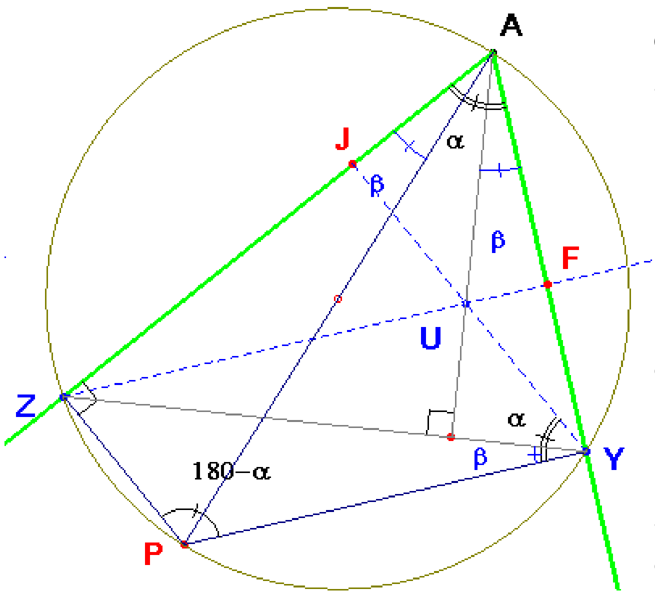
1.- **Las rectas *AU, BV* y *CW* son concurrentes.**

De las definiciones de los puntos resultan *WV = PV – PW = PZ– PY= YZ.*

Análogamente *WU = XZ, VU = XY.* Se tiene pues la igualdad de triángulos *ΔXYZ = ΔUVW.*




Ahora vamos a ver que ***U* es el ortocentro del triángulo *AZY,*** e igualmente que *V* lo es de *BZX* y *W de CXY.* Y esto sin suponer que las cevianas concurrentes sean bisectrices. Ni siquiera que sean concurrentes.




Para ello demostraremos que **en el cuadrilátero** inscriptible ***AYPZ***, con dos ángulos rectos en *Y* y en *Z*, **la recta *AU***, (donde *U* se define por *PU=PY+PZ*) **es perpendicular al lado *YZ.***

En *AYPZ* el ángulo en *P,* opuesto a *A*, mide 180-α, y por tanto, el ángulo *UYP* es α, y ∡ *AYU* es 90-α, pues ∡*Y* es recto. Por consiguiente Δ*AJY* es rectángulo en *J*, o sea, *YU* es una altura de Δ*AYZ*.

El mismo razonamiento prueba que *ZU* es otra altura y por tanto *U* es el ortocentro de Δ*AYZ*, y con ello *AU* es perpendicular a *YZ* como pretendíamos probar.

Además ∡ *ZYP* =∡ *ZAP* = β = ∡ *UAY,* por tener sus lados perpendiculares. Por tanto las rectas *AP* y *AU* son isogonales.

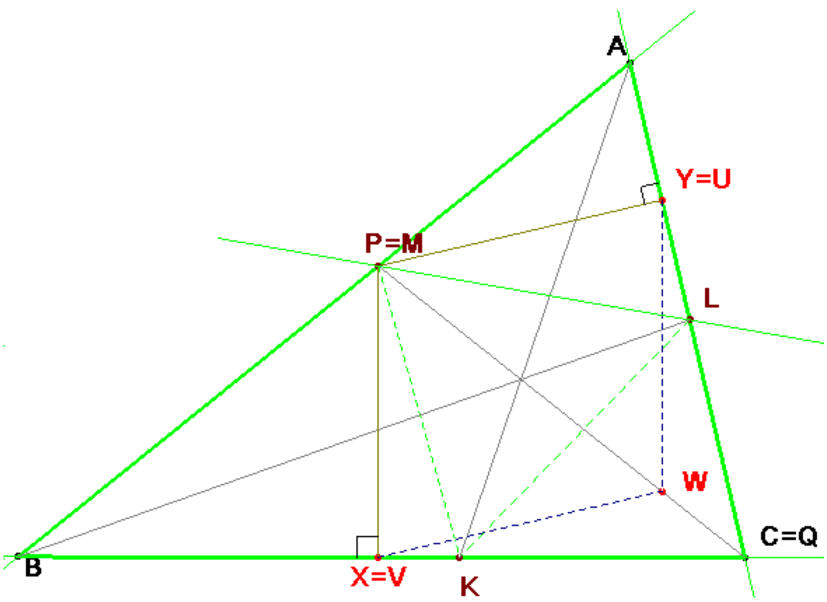
De la igualdad de los triángulos Δ *XYZ* = Δ*UVW* se sigue que *AU, BV* y *CW* son las alturas de Δ*UVW,* y por tanto, concurrentes en el punto *Q*, ortocentro del mismo. Y además ***Q* es el conjugado isogonal de *P.***

A partir de aquí consideramos que el triángulo *KLM* es el formado por los pies de las bisectrices interiores del triángulo *ABC.*

Vamos a suponer que *P* se mueve libremente sobre la recta (no sobre el segmento) *LM.*

Para ver cómo es el lugar geométrico que describe *Q*, comenzaremos construyendo alguno de sus puntos.

2.- **El lugar geométrico es una hipérbola, de la cual forman parte los vértices del triángulo.**

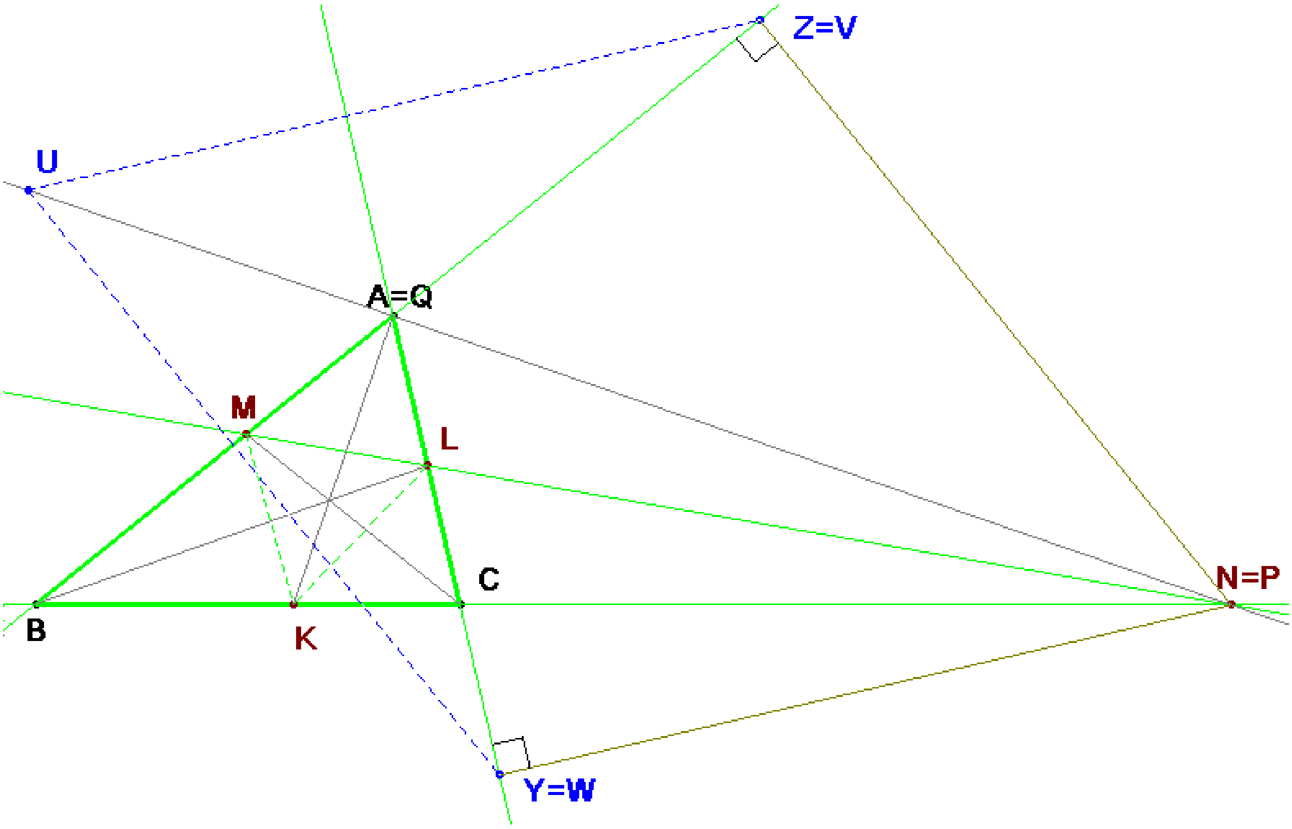


En efecto:

a) Si se toma el punto *P* coincidiendo con *M*, pie de la bisectriz de *C*, *PZ*= 0 y entonces *Y=U, X=V; PX* y *PY* de igual longitud*, W* es el extremo de *MX* + *MY,* un punto de la bisectriz de *C,* por la construcción hecha. El punto *Q* es el de intersección de *AY=AC, BV=BC* y *CW= CM* (bisectriz de *C*), o sea, el punto *C.*

b) Si nos vamos al otro extremo del segmento, *P=L,* razonando como antes se obtiene el punto *B* del triángulo formando parte del lugar geométrico.

c) Si ahora tomamos *P=N,* intersección de la recta *LM* con el lado *BC* y también punto de la bisectriz exterior de *A,* ahora son *PX*=0 y por tanto, *Y=W* y *Z=V. PU = PY + PZ* razonando como en 2a) es tal que *U* es un punto de la bisectriz exterior de *A*. El punto *Q* es la de intersección de *CW=CY= CA, BV=BZ=BA* y *AU= NA* (bisectriz exterior de *A*), o sea, el punto *A.*



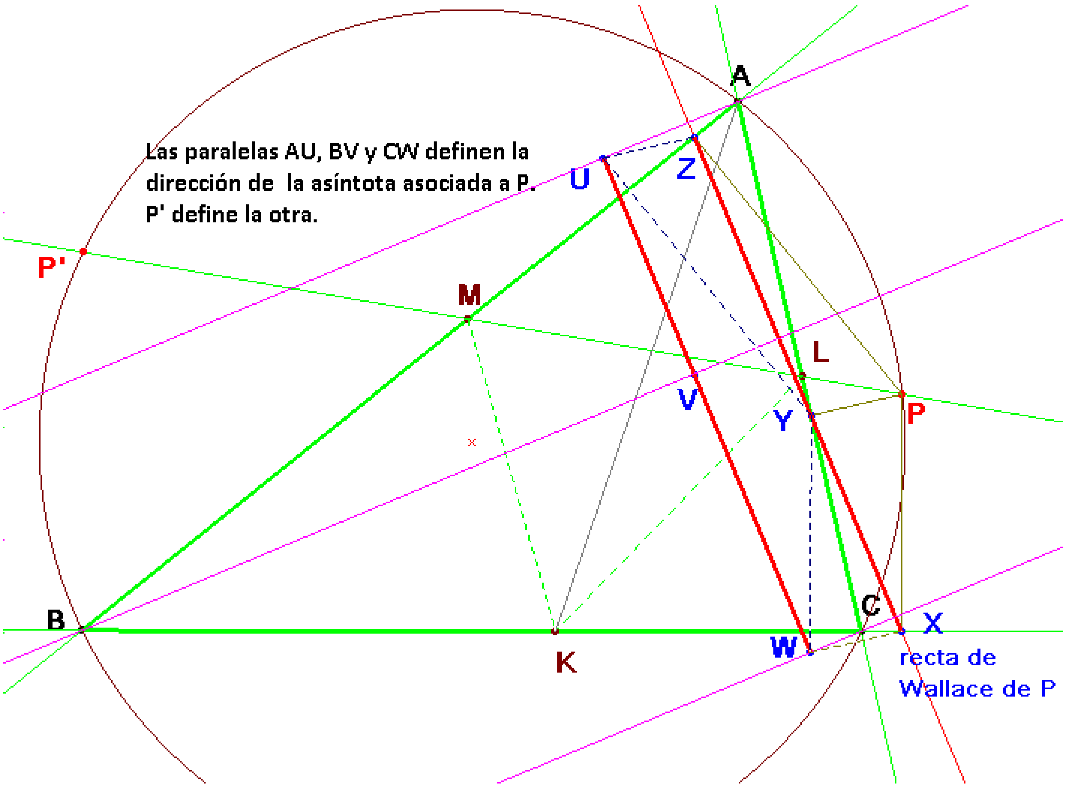

d) Si el triángulo *UVW* (o el *XYZ* congruente con él y de lados paralelos) fuera degenerado, esto es, un segmento, el punto *Q* estaría en el infinito al ser intersección de rectas paralelas (perpendiculares al segmento). Como *XYZ* es el triángulo pedal del punto *P,* sabemos que esto sucede cuando *P* se encuentra sobre la circunferencia circunscrita a *ABC.* El triángulo pedal degenera en la recta de Wallace (que no de Simson).

La recta que une los pies de dos bisectrices siempre corta a la circunscrita en dos puntos. Hay pues dos puntos impropios de este lugar. Con los tres anteriores podemos decir que se trata de una hipérbola circunscrita al triángulo *ABC.*

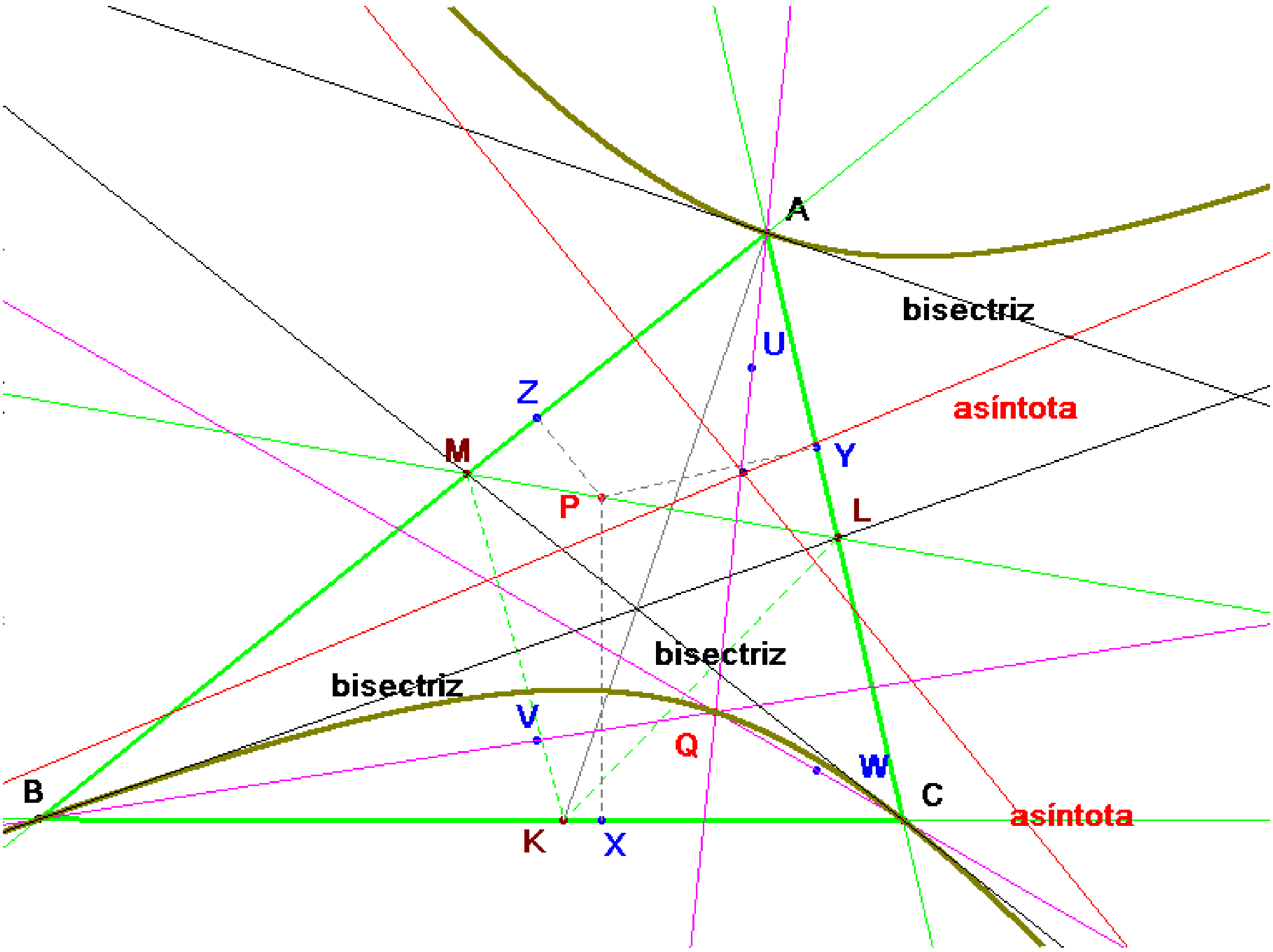
**3.- Las bisectrices interiores de *B* y *C*, y la exterior de *A* son tangentes a la hipérbola.**

Si entendemos esta cónica como la generada por los puntos de intersección las rectas homólogas en una proyectividad de dos haces de rectas centrados en *B* y *C* respectivamente, podremos sacar algunas conclusiones más.

Esta proyectividad se tendría que definir haciendo corresponder a una determinada recta *BV* del haz centrado en *B,* la recta *CW* del correspondiente de vértice *C*.




A la recta *BC*, común a los dos haces, si se la considera del primero, le corresponde la tangente a la cónica en el segundo. Esta es la situación del caso 2 a).

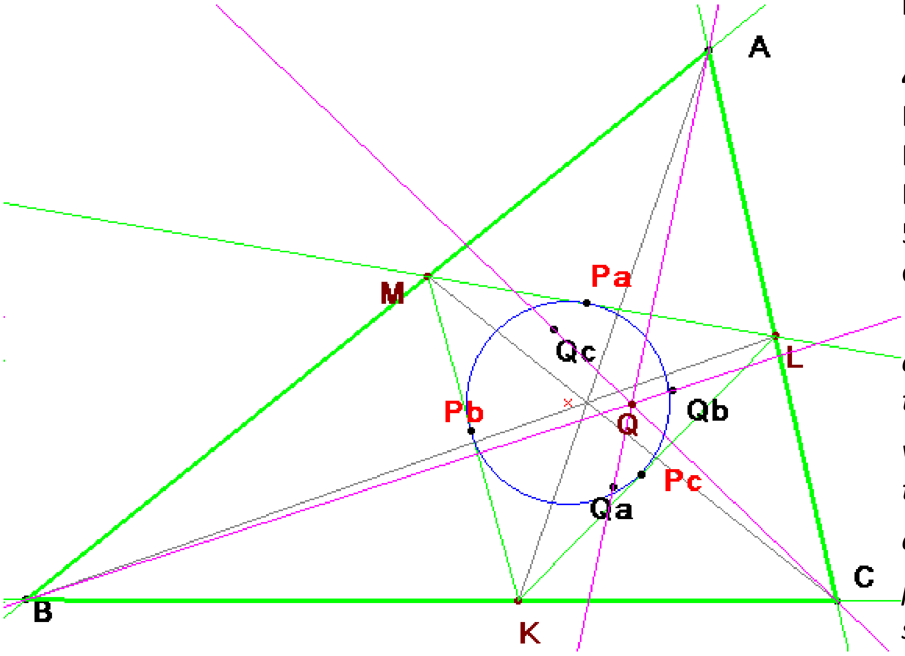


Así pues, la bisectriz de *C* es la tangente a la hipérbola en ese punto.

Considerada ahora como del haz centrado en *C,* es la tangente en *B* la que se corresponde con ella. Es el caso 2 b.

Considerando ahora la cónica definida por la proyectividad entre los haces de centros los vértices *C* y *A.* A la recta *CA*, considerada en el primer haz le corresponde la tangente en *A* en el segundo. Este es 2 c.

La conclusión es que el lugar geométrico de los puntos *Q* obtenidos según se dice en el problema al variar *P* sobre la recta *LM* es una hipérbola circunscrita al triángulo donde las bisectrices interiores de *B* y *C* y la exterior de *A* son tangentes en esos puntos. Y con esto se concluye esta primera parte.

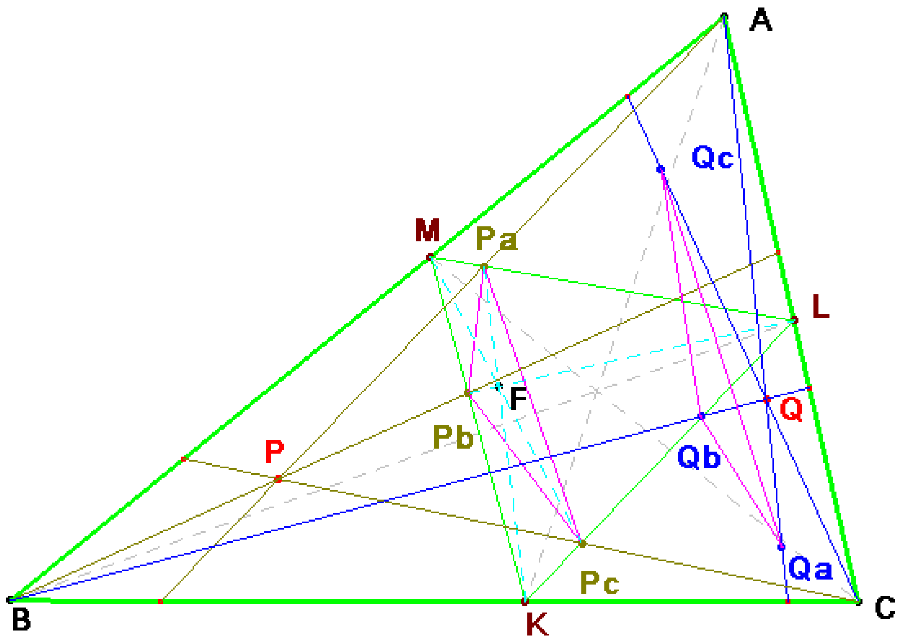



**4.- Caso particular :**

En el problema nº 87 de la Real Sociedad Matemática Española (vol 11, nº 3, pág. 512 de 2008) demostramos que

*Si $T_1$ es un triángulo cualquiera inscrito en otro triángulo $T_2$ , y éste a su vez, está inscrito en un tercero $T_3$ y en perspectiva con él, $T_1$ y $T_3$ estarán en perspectiva si y solamente si lo están $T_1$ y $T_2$.*

Aplicando ese resultado a nuestro caso tenemos que el triángulo $T_1 = \Delta P_aP_bP_c$ , es el formado por los vértices del triángulo ceviano del punto de Gergonne de $T_2 = \Delta KLM$. Y por tanto, el triángulo $T_3 = \Delta ABC$ está en perspectiva con $T_1$ . Por tanto $AP_a$ , $BP_b$ y $CP_c$ concurren en el punto *P* y sus respectivas isogonales $AQ_a$, $BQ_b$ y $Cq_c$ concurren en el punto *Q*, conjugado isogonal del anterior.




Esto es $T_3 = \Delta ABC$ y $T = \Delta Q_aQ_bQ_c$ son perspectivos como se quería demostrar.

Obsérvese que $T_1 = \Delta P_aP_bP_c$ puede ser sustituido por cualquier triángulo inscrito en $T_2 = \Delta KLM$ perspectivo con él, como puede verse en la última figura.