

Problema 607.

Demostrar que el área de un triángulo ABC tiene por expresión

$$\frac{(p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C}{2 \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right)}$$

C.A- Laisant (1893): Arithmétique Algèbre Élémentaire. Trigonométrie. p.62
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez

Soluzione di Ercole Suppa. Sia $S = [ABC]$. Utilizzando le note formule

$$\sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

e le formule analoghe per gli angoli B e C abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} (p-a)^2 \sin A &= 2S \cdot \left[\frac{(p-a)^2}{bc} + \frac{(p-b)^2}{ac} + \frac{(p-c)^2}{ab} \right] = \\ &= 2S \cdot \frac{[a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2]}{abc} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\text{cyc}} \sin^2 \frac{A}{2} &= 2 \cdot \left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-a)(p-c)}{ac} + \frac{(p-a)(p-b)}{ab} \right] = \\ &= 2 \cdot \frac{a(p-b)(p-c) + b(p-a)(p-c) + c(p-a)(p-b)}{abc} \end{aligned} \quad (2)$$

Dalla (1) e la(2) discende che

$$\begin{aligned} &\frac{(p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C}{2 \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right)} = \\ &= S \cdot \frac{a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2}{a(p-b)(p-c) + b(p-a)(p-c) + c(p-a)(p-b)} = \\ &= S \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - b^2c - ac^2 - bc^2 + 6abc}{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - b^2c - ac^2 - bc^2 + 6abc} = \\ &= S \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare. $\square$