Sean $\widehat{ABC}$ y $\widehat{P_aP_bP_c}$ un triángulo y su triángulo ceviano de un punto P; consideremos los puntos B_c simétrico de B respecto a C y C_b simétrico de C respecto a B. La recta perpendicular a AP por P corta a los lados AB y AC en C_{ap} y B_{ap}, respectivamente. La recta perpendicular a AB_c por C_{ap} y la perpendicular a AC_b por B_{ap}, se cortan en un punto A_P.

1) Similarmente se definen B_P y C_P, procediendo cíclicamente. Entonces, si P está en la elipse circunscrita de Steiner o en la recta del infinito, las rectas AA_P, BB_P y CC_P son concurrentes en un punto P'. En el primer caso, P' está en la recta que pasa por los centros de las hipérbolas de Kiepert y Jerabek; en el segundo, P' describe la hipérbola de Kiepert.

2) Si en vez de tomar la perpendicular a AP por P, la tomamos por un punto variable X de AP, ella corta a los lados AB y AC en los puntos C_{ax} y B_{ax}, respectivamente. Entonces, la recta perpendicular a AB_c por C_{ap} y la perpendicular a AC_b por B_{ap}, se cortan en el punto A_X, que describe una recta ℓ_P que pasa por A y A_P.

3) En particular, si el triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo en A ó isósceles de base BC, cuando $P = G$ (baricentro) la recta ℓ_G es la altura por A.

SOLUCIÓN:
Del apartado 3) de este ejercicio se obtiene el:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **608**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

Sean X, M, Y los puntos medios de los lados AB, AC y BC de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, P es un punto en la prolongación de CA ubicado de modo que PA = AC y Q es un punto ubicado en la prolongación de AC ubicado de modo que CQ = CA, L es el punto de intersección de las medianas AY y CX y r0 es una recta perpendicular a LM que es secante a los catetos AB y BC en X' y Y' respectivamente. Sea S el punto de intersección de la recta r1 que pasa por X' y es perpendicular a PB con la recta r2que pasa por Y' y es perpendicular a BQ. S pertenece a la altura del vértice B del triángulo ABC.

Propuesto por Milton Favio Donaire Peña, Estudiante de la Universidad Nacional de Ingenieria Lima - Perú. Facultad de ciencias especialidad Física Pura. Asesor del equipo Olímpico del Perú en el curso de Geometría

—— - ——

1) Usando coordenadas baricéntrica homogéneas, sea $P(p:q:r)$ y su triángulo ceviano, respecto a $\widehat{ABC}$, de vértices:

$$P_a(0:q:r), \qquad P_b(p:0:r), \qquad P_c(p:q:0).$$

El simétrico de B respecto a C es $A_{bc}(0:-1:2)$ y el simétrico de C respecto a N es $A_{cb}(0:2:-1)$.
La recta perpendicular a AP por P es:

$$-(b^2q^2+b^2r^2+2qrS_A)x+(p(c^2q+rS_A)+r(qS_B-rS_C))y+(p(b^2r+qS_A)+q(rS_C-qS_B))z=0.$$

Que corta al lado AC en el punto:

$$B_{ap}\left(p(b^2r+qS_A)+q((-q)S_B+rS_C):0:c^2q^2+b^2r^2+2qrS_A\right).$$

Y al lado AB en:

$$C_{ap}\left(p(rS_A+qc^2)+r(qS_B-rS_C):2qrS_A+q^2c^2+r^2b^2:0\right).$$

Las perpendiculares por B_{ap} a la recta AA_{cb} y por C_{ap} a la recta AA_{bc} (cuyas ecuaciones son engorrosas de escribir), se cortan en el punto:

$$A_P\left(***:(a^2-c^2)(2q+r):(a^2-b^2)(q+2r)\right).$$

Por lo que la ecuación de la recta AA_P es:

$$AA_P:\ (a^2-b^2)(q+2r)y+(c^2-a^2)(2q+r)z=0. \tag{1}$$

Similarmente, se obtienen las ecuaciones de las rectas:

$$BB':\ (a^2-b^2)(2r+p)x+(b^2-c^2)(r+2p)z=0, \qquad CC':\ (c^2-a^2)(p+2q)x+(b^2-c^2)(2p+q)y=0.$$

En consecuencia, las rectas AA_P, BB_P y CC_P son concurrentes si:

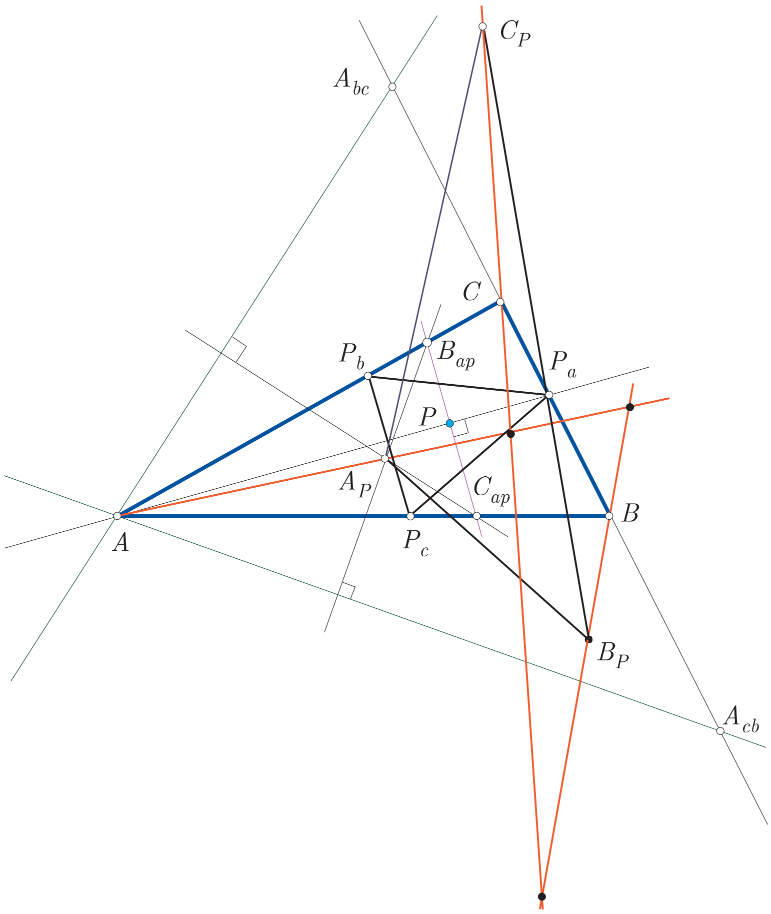
$$6(a-b)(a-c)(b-c)(a+b)(a+c)(b+c)(p+q+r)(pq+pr+qr)=0.$$

Lo cual ocurre en cualquier triángulo isósceles o, en general, cuando el punto P está en la recta del infinito o sobre la elipse circunscrita de Steiner:

$$x+y+z=0, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$$

En estos dos últimos casos el punto de concurrencia está, respectivamente, en la hipérbola de Kiepert o en la recta de ecuaciones siguientes:

$$\frac{b^2-c^2}{x}+\frac{c^2-a^2}{y}+\frac{a^2-b^2}{z}=0, \qquad \frac{x}{b^2-c^2}+\frac{y}{c^2-a^2}+\frac{z}{a^2-b^2}=0.$$



Esta última recta contiene a los centros de las hipérbolas circunscritas equiláteras de Kiepert (pasa por el baricentro) y de Jerabek (pasa por el circuncentro), que son X_{115} y X_{125}, respectivamente:

$$\left((b^2-c^2)^2 : (c^2-a^2)^2 : (a^2-b^2)^2\right), \qquad \left((b^2-c^2)^2 S_A : (c^2-a^2)^2 S_B : (a^2-b^2)^2 S_C\right).$$

Salvo que Q esté en las perpendiculares por A a los lados AB y AC, en cuyo caso, para todo punto P, el punto A_P es el punto del infinito de las rectas respectivas:

$$(b^2-a^2)y+(S_C+b^2)z=0, \qquad (S_B+c^2)y+(c^2-a^2)z=0.$$

2) Si el punto P lo tomamos variable en una recta que pase por A y $Q(u:v:w)$, entonces el punto A_P describe la recta de ecuación:

$$(a^2-b^2)(v+2w)y-(a^2-c^2)(2v+w)z=0.$$

3) En el caso de que P sea el baricentro $G(1:1:1)$ y el ángulo en A sea recto, la recta (1) coincide con la altura por A, de ecuación $(a^2-b^2+c^2)y-(a^2+b^2-c^2)z=0$, que en estas condiciones queda de la forma:

$$c^2y-b^2z=0,$$

es decir, coincide con la simediana por A.

También, la recta (1) coincide con la altura por A si el triángulo es isósceles con base BC ($b=c$). En este caso ambas coinciden con la bisectriz y mediana ($y-z=0$).

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2482.pdf