

Problema 608

Sean X, M, Y los puntos medios de los lados AB, AC y BC de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, P es un punto en la prolongación de CA ubicado de modo que PA = AC y Q es un punto ubicado en la prolongación de AC ubicado de modo que CQ = CA, L es el punto de intersección de las medianas AY y CX y r_0 es una recta perpendicular a LM que es secante a los catetos AB y BC en X' y Y' respectivamente. Sea S el punto de intersección de la recta r_1 que pasa por X' y es perpendicular a PB con la recta r_2 que pasa por Y' y es perpendicular a BQ. S pertenece a la altura del vértice B del triángulo ABC.

Dionaire, M. F. (2011): Comunicación personal.

Solución de Nicolás Rosillo (con DERIVE)

Partimos de un triángulo genérico A(0,a), B(0,0) y C(c,0)

$$\#1: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}(a, b, c, d) := x \cdot (b - d) + y \cdot (c - a) + a \cdot d - b \cdot c = 0$$

$$\#2: \text{RECTAPARALELA}(m, n, p, a, b) := m \cdot (x - a) + n \cdot (y - b) = 0$$

$$\#3: \text{RECTAPERPENDICULAR}(m, n, p, a, b) := n \cdot (x - a) - m \cdot (y - b) = 0$$

$$\#4: \text{INTERSECCIONRECTAS}(\alpha, \beta, \tau, \kappa, \lambda, \mu) := \left[\frac{\beta \cdot \mu - \tau \cdot \lambda}{\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa}, \frac{\tau \cdot \kappa - \alpha \cdot \mu}{\alpha \cdot \lambda - \beta \cdot \kappa} \right]$$

Obtención de L

$$\#5: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}\left(0, a, \frac{c}{2}, 0\right)$$

$$\#6: 2 \cdot a \cdot x + c \cdot y - a \cdot c = 0$$

$$\#7: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}\left(0, \frac{a}{2}, c, 0\right)$$

$$\#8: a \cdot x + 2 \cdot c \cdot y - a \cdot c = 0$$

$$\#9: \text{INTERSECCIONRECTAS}(2 \cdot a, c, -a \cdot c, a, 2 \cdot c, -a \cdot c)$$

$$\#10: \left[\frac{c}{3}, \frac{a}{3} \right]$$

Obtención de r_0

$$\#11: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}\left(\frac{c}{3}, \frac{a}{3}, \frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

$$\#12: a \cdot x - c \cdot y = 0$$

$$\#13: \text{RECTAPERPENDICULAR}\left(a, -c, 0, n, \frac{a \cdot n}{c}\right)$$

$$\#14: \frac{\frac{2}{c} \cdot x + a \cdot c \cdot y - n \cdot (a^2 + c^2)}{c} = 0$$

Obtención de X'

$$\#15: \text{INTERSECCIONRECTAS}(c^2, c \cdot a, -n \cdot a^2 - n \cdot c^2, 1, 0, 0)$$

$$\#16: \left[0, \frac{n \cdot (a^2 + c^2)}{a \cdot c} \right]$$

Obtención de r1

$$\#17: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}(-c, 2 \cdot a, 0, 0)$$

$$\#18: 2 \cdot a \cdot x + c \cdot y = 0$$

$$\#19: \text{RECTAPERPENDICULAR}\left(2 \cdot a, c, 0, 0, \frac{n \cdot (a^2 + c^2)}{a \cdot c}\right)$$

$$\#20: c \cdot x - \frac{2 \cdot (a \cdot c \cdot y - n \cdot (a^2 + c^2))}{c} = 0$$

Obtención de Y'

$$\#21: \text{INTERSECCIONRECTAS}(c^2, a \cdot c, -n \cdot a^2 - n \cdot c^2, 0, 1, 0)$$

$$\#22: \left[\frac{n \cdot (a^2 + c^2)}{c^2}, 0 \right]$$

Obtención de r2

$$\#23: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}(2 \cdot c, -a, 0, 0)$$

$$\#24: a \cdot x + 2 \cdot c \cdot y = 0$$

$$\#25: \text{RECTAPERPENDICULAR}\left(a, 2 \cdot c, 0, \frac{n \cdot (a^2 + c^2)}{c^2}, 0\right)$$

$$\#26: \frac{2 \cdot c^2 \cdot x - a \cdot c \cdot y - 2 \cdot n \cdot (a^2 + c^2)}{c} = 0$$

Obtención de S

$$\#27: \text{INTERSECCIONRECTAS}(c^2, -2 \cdot a \cdot c, 2 \cdot n \cdot a^2 + 2 \cdot n \cdot c^2, 2 \cdot c^2, -a \cdot c, -2 \cdot n \cdot a^2 - 2 \cdot n \cdot c^2)$$

$$\#28: \left[\frac{2 \cdot n \cdot (a^2 + c^2)}{c}, \frac{2 \cdot n \cdot (a^2 + c^2)}{a \cdot c} \right]$$

Obtención de la altura por B

#29: RECTAPORDOSPUNTOS(0, a, c, 0)

#30: $a \cdot x + c \cdot y - a \cdot c = 0$

#31: RECTAPERPENDICULAR(a, c, - a·c, 0, 0)

#32: $c \cdot x - a \cdot y = 0$

Obtención de la recta SB

$$\#33: \text{RECTAPORDOSPUNTOS} \left(\frac{2 \cdot n \cdot (a^2 + c^2)}{c}, \frac{2 \cdot n \cdot (a^2 + c^2)}{a \cdot c}, 0, 0 \right)$$

$$\#34: \frac{n \cdot (a^2 + c^2) \cdot (c \cdot x - a \cdot y)}{a \cdot c} = 0$$