

Problema 610

Problema 4. Dados los lados AB y AC de un triángulo acutángulo ABC, se construyen exteriormente al triángulo, semicírculos teniendo estos lados como diámetros. Las rectas conteniendo las alturas relativas a los lados AB y AC cortan esos semicírculos en los puntos P y Q. Demostrar que AP=AQ.

Eureka!, (1999): Núm 4, pag 19. Sociedade Brasileira de Matemática.

Solución de Nicolás Rosillo (Con Derive)

Partimos de un triángulo de vértices (0,0), (a,0) y (b,c)

Definiciones básicas

$$\#1: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}(a, b, c, d) := x \cdot (b - d) + y \cdot (c - a) + a \cdot d - b \cdot c = 0$$

$$\#2: \text{RECTAPERPENDICULAR}(m, n, p, a, b) := n \cdot (x - a) - m \cdot (y - b) = 0$$

Obtención de P

$$\#3: \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$

$$\#4: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}(0, 0, b, c)$$

$$\#5: c \cdot x - b \cdot y = 0$$

$$\#6: \text{RECTAPERPENDICULAR}(c, -b, 0, a, 0)$$

$$\#7: b \cdot x + c \cdot y - a \cdot b = 0$$

$$\#8: \text{SOLVE} \left(\left[\left(\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}, b \cdot x + c \cdot y - a \cdot b = 0 \right], [x, y] \right)$$

$$\#9: \left[x = \frac{\sqrt{a} \cdot (c \cdot \sqrt{(a \cdot b - b^2 - c^2)} \cdot (-b)^{3/2} + \sqrt{a \cdot b^3})}{b \cdot (b^2 + c^2)} \wedge y = \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a \cdot b \cdot c} - \sqrt{(a \cdot b - b^2 - c^2)} \cdot (-b)^{3/2})}{b^2 + c^2}, x = \right]$$

$$\frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a \cdot b^3 - c \cdot \sqrt{(a \cdot b^2 - b^2 - c^2)} \cdot (-b)^{3/2}})}{b \cdot (b^2 + c^2)} \wedge y =$$

$$\left[\frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{(a \cdot b^2 - b^2 - c^2)} \cdot (-b)^{3/2} + \sqrt{a \cdot b \cdot c})}{b^2 + c^2} \right]$$

Obtención de Q

$$\#10: \left(x - \frac{b+a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{c}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$

$$\#11: \text{RECTAPORDOSPUNTOS}(a, 0, b, c)$$

$$\#12: c \cdot x + y \cdot (a - b) - a \cdot c = 0$$

$$\#13: \text{RECTAPERPENDICULAR}(c, a - b, -a \cdot c, 0, 0)$$

$$\#14: x \cdot (a - b) - c \cdot y = 0$$

$$\#15: \text{SOLVE} \left[\left[\left(x - \frac{b+a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{c}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4} + \frac{c^2}{4}, x \cdot (a - b) - c \cdot y = 0 \right], [x, y] \right]$$

$$\#16: \left[y = \frac{(a-b) \cdot (\sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a-b) \cdot (a \cdot b^2 - b^2 - c^2)) + a \cdot c})}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2} \wedge a - b = \right.$$

$$0, y = \frac{(b-a) \cdot (\sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a-b) \cdot (a \cdot b^2 - b^2 - c^2)) - a \cdot c})}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2} \wedge a -$$

$$b = 0, x = \frac{c \cdot (\sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a-b) \cdot (a \cdot b^2 - b^2 - c^2)) + a \cdot c})}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2} \wedge y =$$

$$\frac{(a - b) \cdot (\sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)) + a \cdot c})}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2}, x =$$

$$\frac{c \cdot (a \cdot c - \sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2))})}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2} \wedge y =$$

$$\left[\frac{(b - a) \cdot (\sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)) - a \cdot c})}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2} \right]$$

Comprobación AP=AQ

$$\#17: \left(b - \frac{c \cdot (\sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)) + a \cdot c})}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2} \right)^2 + \left(c - \frac{(a - b) \cdot (\sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)) + a \cdot c})}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2} \right)^2$$

$$\#18: \frac{2 \cdot c \cdot \sqrt{(-a)} \cdot ((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2))^{3/2} + 2 \cdot c \cdot (b - a) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)}{\sim \sim \sim}$$

$$\frac{c^2 \cdot \sqrt{(-a)} \cdot \sqrt{((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)) - (a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 2 \cdot a^2 \cdot (3 \cdot b^2 - c^2))}}{(a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2)^2} \sim \sim \sim$$

$$\frac{+ c^2 - 4 \cdot a \cdot b \cdot (b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2 \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)}{\sim \sim \sim}$$

$$\#19: \left(b - \frac{\sqrt{a} \cdot (c \cdot \sqrt{(a \cdot b - b^2 - c^2)} \cdot (-b)^{3/2} + \sqrt{a \cdot b^3})}{b \cdot (b^2 + c^2)} \right)^2 + \left(c - \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a \cdot b \cdot c} - \sqrt{(a \cdot b - b^2 - c^2) \cdot (-b)^{3/2}})}{b^2 + c^2} \right)^2$$

#20: $-a \cdot b + b^2 + c^2$

#21: $\frac{2 \cdot c \cdot \sqrt{(-a) \cdot ((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2))^{3/2}} + 2 \cdot c \cdot (b - a) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)}{\sim}$

$$\frac{c^2 \cdot \sqrt{(-a) \cdot ((a - b) \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2))} - (a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 2 \cdot a^2 \cdot (3 \cdot b^2 - c^2))}{(a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c^2)^2}$$

$$\frac{+ c^2) - 4 \cdot a \cdot b \cdot (b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2 \cdot (a \cdot b - b^2 - c^2)}{- (-a \cdot b$$

$$+ b^2 + c^2)$$

#22: 0