Problema 610

Problema 4. Dados los lados AB y AC de un triángulo acutángulo ABC, se construyen exteriormente al triángulo, semicírculos teniendo estos lados como diámetros. Las rectas conteniendo las alturas relativas a los lados AB y AC cortan esos semicírculos en los puntos P y Q. Demostrar que AP=AQ.

Eureka!, (1999): Núm 4, pag 19. Sociedade Brasileira de Matemática.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.

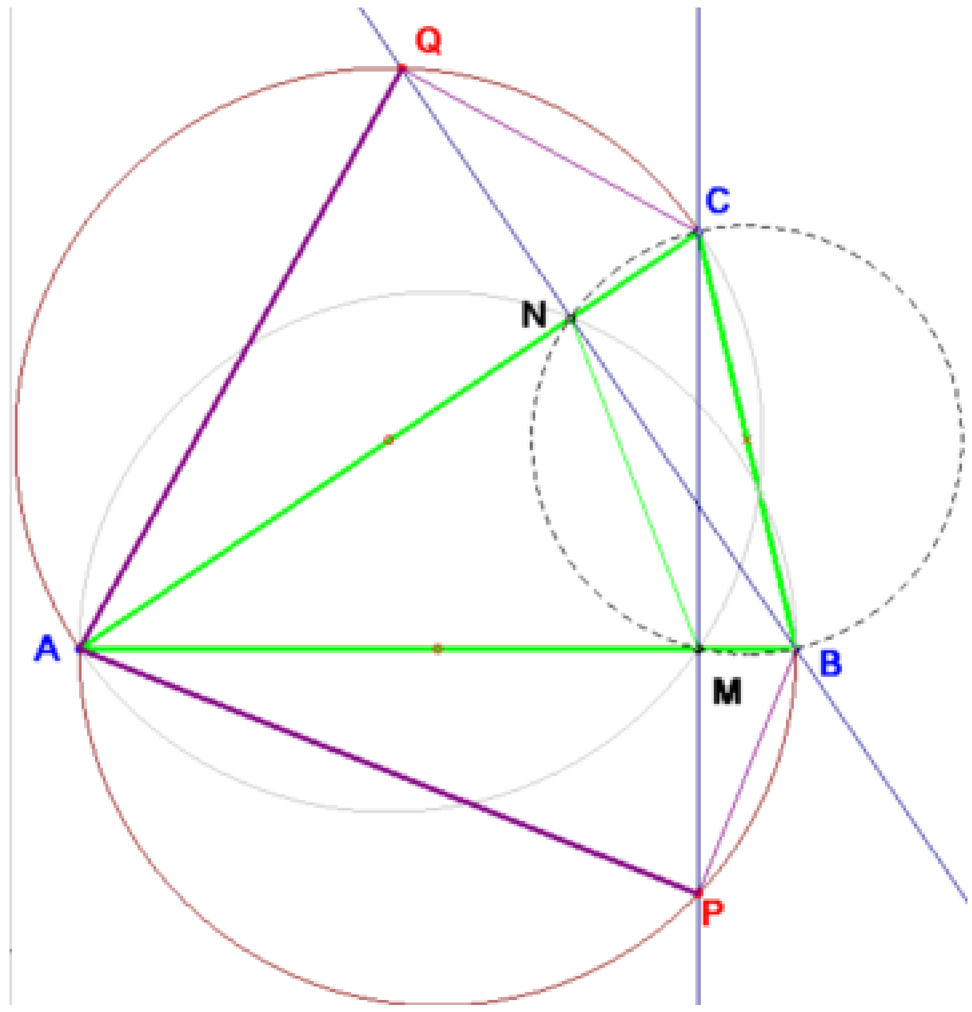
1.- Solución analítica.

Tomando *A*=(0,0), *B* =(2,0) y *C*=(*m*,*n*) se tiene para la circunferencia de diámetro *AB* la ecuación $(x-1)^2+\ y^2=1$, o bien $x^2+y^2=2x$.

La altura desde *C* tiene ecuación $x=m$. Por tanto los puntos que esa altura tiene en común con dicha circunferencia (*P* es uno de ellos) verifican el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=2x \\ x=m \end{array}\right\}$$

Como nos interesa el valor de la distancia de *P* al punto *A* (origen de coordenadas), obtenemos de inmediato $|AP|^2$= 2*m*.



Para el punto *Q* sobre la circunferencia de diámetro *AC*, de ecuación $x^2+y^2=mx+ny$ tenemos el sistema formado por esta ecuación junto con la de la altura desde *B:* $mx+ny=2m$.

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=mx+ny \\ mx+ny=2m \end{array}\right\}$$

De inmediato también se obtiene, como antes, $|AQ|^2$= x^2+y^2 =2m igual a $|AP|^2$como se deseaba demostrar.

2.- Solución sintética

Por el teorema de Pitágoras, y después, por el de la altura

$AP^2=AM^2+PM^2=AM^2+AM\cdot MB=AM\cdot AB$

$$AQ^2=AN^2+QN^2=AN^2+AN\cdot NC=AN\cdot AC$$

Por otro lado, el cuadrilátero *MNBC* es cíclico y la potencia del punto *A* respecto de la circunferencia *MNBC* es igual a cada una de las dos expresiones anteriores. Por tanto $AP^2=AQ^2$ ■