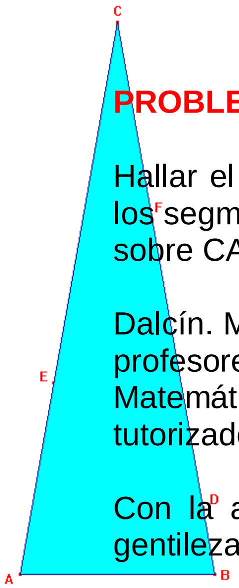


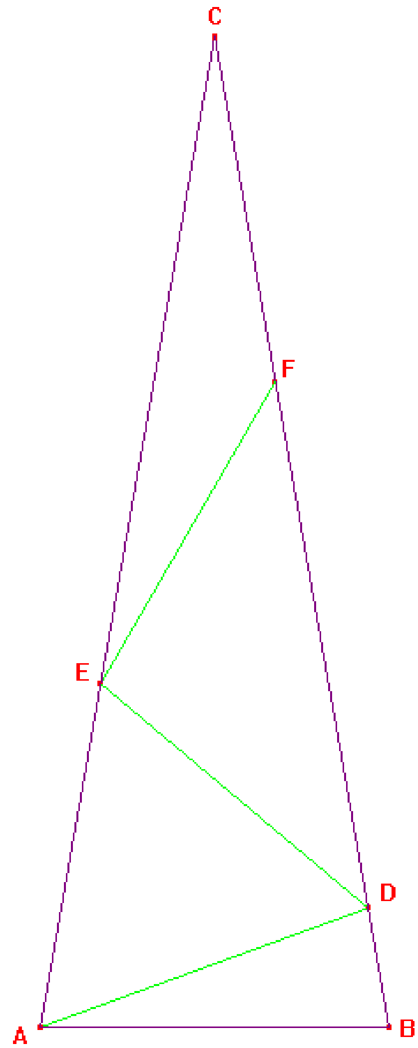
PROBLEMA 611:

Hallar el ángulo ACB (su valor numérico) sabiendo que (ABC) isósceles con AC=BC y que los segmentos AB, AD, DE, EF, FC son iguales con D, y F sobre BC, con el orden CFDB, y E sobre CA, con E interior.

Dalcín. M (2009): Un estudio sobre la iniciación al pensamiento deductivo en la formación de profesores de matemática. El caso de la geometría. Seminario de Investigación en Matemática Educativa III Programa de Doctorado, CICATA–IPN, México Montevideo, tutorizado por: Dr. Javier Lezama. (p. 153)

Con la autorización de su autor, a quien el director agradece la gentileza

Solución de: *Prof. Mariela Lilibeth Herrera*
Universidad de Carabobo - Venezuela



La medida del ángulo ACB es de 20.

Veamos cómo obtenemos este valor, empleando los algunos fundamentos de la geometría euclidiana, tomados del Moise-Downs(1986):

Definición:
Un triángulo con dos lados congruentes se llama isósceles.

Teorema: El teorema del triángulo isósceles (Pons Assinorum)
Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes

Por hipótesis, tenemos que AC=BC y AB= AD=DE=EF=FC, así:

Δ ACB es isósceles, y $m\angle CAB = m\angle CBA$
Δ CFE es isósceles, y $m\angle BCA = m\angle FCE = m\angle CEF$
Δ FED es isósceles, y $m\angle EFD = m\angle EDF$
Δ EDA es isósceles, y $m\angle AED = m\angle EAD$
Δ DAB es isósceles, y $m\angle ADB = m\angle DBA = m\angle CBA$

Corolario: El corolario AA
Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza

Nótese que los triángulos ΔACB y ΔDAB son semejantes, pues ($m\angle CAB=m\angle CBA= m\angle ADB$) dos de sus ángulos correspondiente son congruentes, así: $m\angle BCA=m\angle DAB$, a su vez como $m\angle BCA= m\angle FCE$, (ya que F es un punto entre B y C; y E es un punto entre A y C) entonces: $m\angle BCA=m\angle DAB= m\angle FCE$

Teorema: Para todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos es 180

De acuerdo a este teorema, la suma de los ángulos de los siguientes triángulos es 180:

ΔACB, $m\angle CAB + m\angle CBA + m\angle BCA = 180$
ΔEDA, $m\angle AED + m\angle EAD + m\angle EDA = 180$
ΔFED, $m\angle EFD + m\angle EDF + m\angle FED = 180$

Ahora bien, sustituyendo en las ecuaciones anteriores, las igualdades establecidas por ser ΔACB, ΔEDA y ΔFED triángulos isósceles, tenemos que:

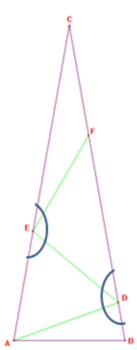
$$m\angle CAB + m\angle CBA + m\angle BCA = 180 \Rightarrow 2.(m\angle CAB)+ m\angle BCA = 180$$
$$m\angle AED + m\angle EAD + m\angle EDA = 180 \Rightarrow 2.(m\angle EAD)+ m\angle EDA = 180$$
$$m\angle EFD + m\angle EDF + m\angle FED = 180 \Rightarrow 2.(m\angle EDF)+ m\angle FED = 180$$

Como D es un punto entre B y C, tenemos que: $m\angle CAB= m\angle CAD + m\angle DAB$ y como establecimos que $m\angle BCA=m\angle DAB$, tenemos que: $\boxed{m\angle CAB=m\angle CAD + m\angle BCA}$

Definición:
Si AB y AD son rayos opuestos, y AC es otro rayo cualquiera, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal

Definición:
Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, entonces decimos que los ángulos son suplementarios

Postulado: El postulado del suplemento
Si dos ángulos forman un lineal, entonces son suplementarios



Como D y F son puntos entre B y C, y E es un punto entre A y C, podemos establecer que, empleando la definición de par lineal, las siguientes relaciones:

$$m\angle ADB + m\angle EDA + m\angle EDF = 180 \Rightarrow m\angle CAB+ m\angle EDA + m\angle EDF=180$$

$$m\angle AED + m\angle FED + m\angle CEF = 180 \Rightarrow m\angle EAD+ m\angle FED +m\angle BCA=180$$

De acuerdo a todo lo planteado anteriormente, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2.(m\angle CAB) + m\angle BCA = 180 & ① \\ 2.(m\angle EAD) + m\angle EDA = 180 & ② \\ 2.(m\angle EDF) + m\angle FED = 180 & ③ \\ m\angle CAB = m\angle CAD + m\angle BCA & ④ \\ m\angle CAB + m\angle EDA + m\angle EDF=180 & ⑤ \\ m\angle EAD + m\angle FED + m\angle BCA=180 & ⑥ \end{cases}$$

Sustituyendo ④ en ①, tenemos que:

$2.(m\angle CAD + m\angle BCA) + m\angle BCA=180 \Rightarrow \boxed{2.(m\angle CAD) +3.(m\angle BCA)=180}$

Igualando ⑤ y ②, sustituyendo ④, (nótese que $m\angle CAD=m\angle EAD$, ya que E es un punto entre A y C): $m\angle CAB+m\angle EDA+m\angle EDF= 2.(m\angle EAD)+m\angle EDA$

$\Rightarrow m\angle CAB+m\angle EDF=2.(m\angle EAD)$

$\Rightarrow (m\angle CAD + m\angle BCA)+ m\angle EDF= 2.(m\angle CAD) \Rightarrow \boxed{m\angle BCA + m\angle EDF = m\angle CAD}$

Igualando ⑥ y ③: $m\angle EAD+m\angle FED+m\angle BCA= 2.(m\angle EDF) + m\angle FED$

$\Rightarrow \boxed{m\angle EAD + m\angle BCA= 2.(m\angle EDF)}$

El sistema anterior queda reducido al siguiente:

$$\begin{cases} 2.(m\angle CAD) +3.(m\angle BCA)=180 & ❶ \\ m\angle BCA+ m\angle EDF= m\angle CAD & ❷ \\ m\angle EAD + m\angle BCA= 2.(m\angle EDF) & ❸ \end{cases}$$

Sustituyendo ❷ en ❶:

$2.(m\angle BCA+ m\angle EDF) +3.(m\angle BCA)=180 \Rightarrow \boxed{5.(m\angle BCA)+2.(m\angle EDF)=180}$ ❹

Como $m\angle CAD=m\angle EAD$, sumamos miembro a miembro ❷ y ❸

$$\begin{array}{l} m\angle BCA+ m\angle EDF = m\angle CAD \\ m\angle EAD + m\angle BCA = 2.(m\angle EDF) \quad + \\ \hline m\angle BCA+ m\angle EDF + m\angle EAD + m\angle BCA = m\angle CAD+ 2.(m\angle EDF) \Rightarrow \boxed{2.(m\angle BCA) = m\angle EDF} \end{array}$$ ❺

Finalmente, sustituyendo ❺ en ❹, tenemos que:

$5.(m\angle BCA)+2.(2.(m\angle BCA))=180$

$\Rightarrow 5.(m\angle BCA)+4.(m\angle BCA))=180$

$\Rightarrow 9.(m\angle BCA)=180$

$\Rightarrow m\angle BCA=20$, como ya se afirmó.