

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Problema 612.

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, con lados $a > b \geq c$, con b fijo y a, c, variables. Sean w_a, m_a, h_a , la bisectriz, mediana y altura, respectivamente, al lado a, y m_b y m_c las medianas de los lados b y c

Calculad, los siguientes límites :

$$\begin{aligned} i) l_{wh} &= \lim_{c \rightarrow b} \frac{w_a - h_a}{(c - b)^2}, \quad ii) l_{mh} = \lim_{c \rightarrow b} \frac{m_a - h_a}{(c - b)^2}, \quad iii) l_{mw} = \lim_{c \rightarrow b} \frac{m_a - w_a}{(c - b)^2}, \\ iv) l_h &= \lim_{c \rightarrow b} \frac{\frac{1}{h_a} - \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}{(c - b)^2}, \quad v) l_m = \frac{\sqrt{5}m_a - \sqrt{m_b^2 + m_c^2}}{(c - b)^2} \end{aligned}$$

Romero, J. B. (2011): comunicación personal.

Solución de Nicolás Rosillo. IES MÁXIMO LAGUNA, Sta Cruz de Mudela, Ciudad Real.

Se usa DERIVE 6.

Triángulo rectángulo genérico de vertices (0,0) (0,1) y (a,0)

Punto corte bisectriz sobre hipotenusa

$$\#1: \left[\frac{a}{a+1}, \frac{a}{a+1} \right]$$

Punto corte altura sobre hipotenusa

$$\#2: \left[\frac{a}{\frac{2}{a+1}}, \frac{\frac{2}{a}}{\frac{2}{a+1}} \right]$$

Cálculo expresión i)

$$\#3: \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{\left(\left(\frac{a}{a+1}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+1}\right)^2\right)} - \sqrt{\left(\left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^2\right)}}{(a-1)^2}$$

$$\#4: \frac{\sqrt{2}}{16}$$

$$\#5: \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\left(\frac{a}{a+1}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 - \left(\left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^2\right)}{(a-1)^2}$$

$$\#6: \frac{1}{8}$$

Cálculo expresión ii)

$$\#7: \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}} - \sqrt{\left(\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^2\right)}}{(a-1)^2}$$

$$\#8: \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\#9: \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{4} - \left(\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^2\right)}{(a-1)^2}$$

$$\#10: \frac{1}{2}$$

Cálculo expresión iii)

$$\#11: \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}\right)} - \sqrt{\left(\left(\frac{a}{a+1}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+1}\right)^2\right)}}{(a-1)^2}$$

$$\#12: \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{16}$$

$$\#13: \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{4} - \left(\left(\frac{a}{a+1}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+1}\right)^2\right)}{(a-1)^2}$$

$$\#14: \frac{3}{8}$$

Cálculo expresión iv)

$$\#15: \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2\right)}} - \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}}{(a-1)^2}$$

$$\#16: 0$$

Cálculo expresión v)

$$\#17: \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{1}{4}}}{(a-1)^2}$$

$$\#18: 0$$