Problema 615 de triánguloscabri. *Sean EBC un triángulo equilátero y A un punto interior a él. Si R, r y s son los radios de la circunfencia circunscrita e inscrita, y el semiperímetro del triángulo ABC, demostrar que se cumple $R + r > \frac{s}{\sqrt{3}}$.*

Solución de Francisco Javier García Capitán

Este problema aparece como resultado de una investigación.

Problema 1 (Investigación)**.** *Estudiar desigualdades del tipo $R + r \gtreqless ks$.*

Solución. Teniendo en cuenta que

$$R + r = ks \Leftrightarrow R^2 + r^2 + 2Rr = k^2 s^2$$

sustituyendo R^2, r^2 y Rr, cuando el triángulo es equilátero tendremos

$$\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3} = \frac{9a^2}{4} k^2 \Rightarrow 9k^2 = 3 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por tanto, si queremos una desigualdad que se convierta en igualad cuando el triángulo es equilátero, tenemos que considerar $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Para ver el signo de la desigualdad para los diferentes triángulos, usamos *Mathematica*, encontrando la relación:

$$\frac{s^2}{3} - (R + r)^2 = \frac{8R^2}{3} \left(\cos A - \frac{1}{2}\right) \left(\cos B - \frac{1}{2}\right) \left(\cos C - \frac{1}{2}\right).$$

A partir de aquí deducimos que

1. Siempre que alguno de los ángulos del triángulo sea igual a $60°$, el segundo miembro será nulo, y por tanto se cumple la igualdad $R + r = \frac{s}{\sqrt{3}}$. La única forma de que los tres ángulos del triángulo ABC puedan ser mayores o iguales que $60°$ es que el triángulo sea equilátero.

2. Si exactamente dos de los tres ángulos son mayores o iguales que $60°$, el segundo miembro será positivo o cero, por tanto se cumplirá la desigualdad $R + r \leqslant \frac{s}{\sqrt{3}}$.

3. Si sólo un ángulo es mayor o igual que $60°$, el segundo miembro será positivo o cero, por tanto se cumplirá la desigualdad $R + r \geqslant \frac{s}{\sqrt{3}}$.

Este estudio da lugar al planteamiento de posibles problemas.

Problema 2. *Demostrar que en un triángulo ABC, con la notación habitual, se tiene la relación:*

$$s^2 - 3(R+r)^2 = R^2 \cdot (2\cos A - 1)(2\cos B - 1)(2\cos C - 1).$$

Solución. Recordemos que los cosenos de los ángulos del triángulo ABC cumplen

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B + \cos C =& \frac{R+r}{R}, \\
\cos A \cos B + \cos A \cos C + \cos B \cos C =& \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}, \\
\cos A \cos B \cos C =& \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2}.
\end{aligned}$$

Entonces, llamando $x = \cos A, y = \cos B, z = \cos C$, tenemos

$$\begin{aligned}
& R^2(2x-1)(2y-1)(2z-1) \\
=& R^2\left(8xyz - 4(yz + zx + xy) + 2(x+y+z) - 1\right) \\
=& 8R^2 \cdot \left(\frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2}\right) - 4R^2 \cdot \left(\frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}\right) + 2R^2 \cdot \frac{R+r}{R} - R^2 \\
=& 2s^2 - 8R^2 - 8Rr - 2r^2 - s^2 - r^2 + 4R^2 + 2R^2 + 2Rr - R^2 \\
=& s^2 - 3R^2 - 6Rr - 3r^2 \\
=& s^2 - 3(R+r)^2.
\end{aligned}$$

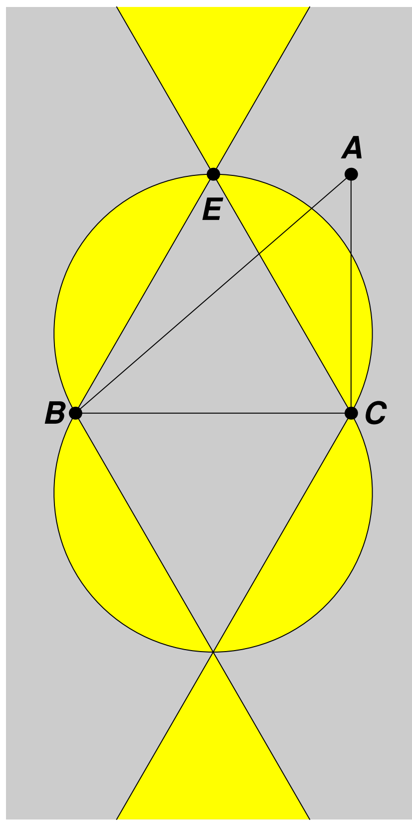
Problema 615 de triánguloscabri. *Sean EBC un triángulo equilátero y A un punto interior a él. Si R, r y s son los radios de la circunfencia circunscrita e inscrita, y el semiperímetro del triángulo ABC, demostrar que se cumple $R + r > \frac{s}{\sqrt{3}}$.*

Solución. Por la situación del punto A, los ángulos B y C serán menores que 60° mientras que el ángulo A es mayor que 60°. Entonces, el segundo miembro de la expresión

$$\frac{s^2}{3} - (R+r)^2 = \frac{8R^2}{3}\left(\cos A - \frac{1}{2}\right)\left(\cos B - \frac{1}{2}\right)\left(\cos C - \frac{1}{2}\right). \qquad (1)$$

es negativo, teniendo por tanto que $R + r > \frac{s}{\sqrt{3}}$.

El recíproco no es cierto, es decir, hay puntos fuera del triángulo EBC que cumplen la misma desigualdad. Por supuesto, están aquellos que son interiores al triángulo simétrico de EBC respecto del segmento BC. Pero además, es fácil razonar que hay otros puntos, que son los que forman la región gris de la figura siguiente.



Por ejemplo, en el triángulo ABC mostrado en la figura tenemos claramente $A < 60°$, $B < 60°$ y $C > 60°$. Por tanto, en este caso también tenemos que exactamente uno de los tres ángulos del triángulo ABC es mayor que $60°$, cumpliéndose por tanto la desigualdad $R + r > \frac{s}{\sqrt{3}}$, ya que el segundo miembro de (1) es negativo.