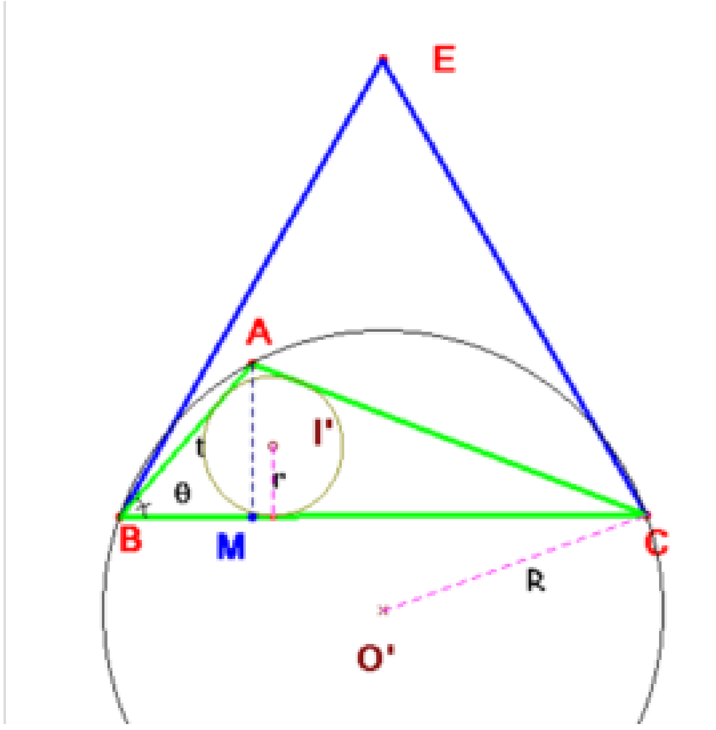
Propuesto por Francisco Javier García Capitán

Problema 615.- *Sean EBC un triángulo equilátero y A un punto interior a él. Si R, r y s son los radios de la circunferencia circunscrita e inscrita, y el semiperímetro del triángulo ABC, demostrar que se cumple* $R+r>\frac{s}{\sqrt{3}}$

García, J.F. (2011): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.



Supongamos que el triángulo *EBC* tiene lado unidad. Sea $A=(t\cdot cos\theta, t\cdot sen\theta)$ donde θ es el ángulo *ABC* recorrido en sentido positivo.

Para los parámetros que definen *A* se tienen las acotaciones: $0\le t\le 1$ y $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$, (las igualdades se alcanzan cuando el punto se encuentra sobre el perímetro del triángulo equilátero). Además $0\le AC\le 1$, y $1\le s\le 1'5$. El extremo inferior de *s* se alcanza cuando *A* está sobre *BC* mientras que el superior se consigue cuando coincide con *E*. Si *A* es interior, las desigualdades son estrictas.

Por el teorema de los senos y la expresión del área de *ABC* podemos poner

$$R=\frac{AC}{2\cdot sen\theta} \text{ y } r=\frac{t\cdot sen\,\theta}{2s}.$$

Así pues se tendrá:

$$R+r=\frac{s\cdot AC+t\cdot sen^2\theta}{2s\cdot sen\,\theta}>\frac{s\cdot AC+t\cdot sen^2\theta}{\sqrt{3}s} \quad (1)$$

Si probamos que

$$s^2-AC\cdot s-t\cdot sen^2\theta<0 \qquad (2)$$

para todos los valores posibles de *s*, habremos concluido con la demostración propuesta.

Considerando la ecuación en *s*

$$s^2-AC\cdot s-t\cdot sen^2\theta=0 \qquad (3)$$

que tiene dos soluciones reales (su discriminante es positivo), para demostrar (2) bastará con demostrar que todos los valores posibles del semiperímetro *s* se encuentran en el intervalo definido por esas soluciones. Como una es negativa, será suficiente demostrar que la solución positiva de (3) es menor que 1'5, cota superior para el semiperímetro.

Según la regla de acotación de Laguerre para las raíces positivas de un polinomio *p*(*x*), si al dividirlo por *x*-*L* (con *L*>0), los coeficientes del cociente y el resto son no negativos, *L* es una cota superior de las raíces positivas de este polinomio.

Pues bien, dividiendo $p(s)=s^2-AC\cdot s-t\cdot sen^2\theta$ entre $(s-1'5)$ obtenemos:

$s^2-AC\cdot s-t\cdot sen^2\theta=(s-1'5)\cdot(s+(1'5-AC))+(1'5^2-AC\cdot 1'5-t\cdot sen^2\theta)$, donde $1'5-AC>0$ y

$1'5^2-AC\cdot 1'5-t\cdot sen^2\theta\ge 2'25-1'5\cdot AC-0'75=1'5\cdot(1-AC)\ge 0.$ ■