

Problema 620 de triángulos cabri. Dado un triángulo ABC , encontrar E sobre la recta BC , F sobre CA y G sobre AB de manera que

$$\begin{aligned}AC^2 + CE^2 &= AB^2 + BE^2, \\BA^2 + AF^2 &= BC^2 + CF^2, \\CA^2 + AG^2 &= CB^2 + BG^2.\end{aligned}$$

Demostrar que las cevianas AE , BF y CG concurren.

Propuesto por Ricardo Barroso Campos.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Si escribimos $E = (0 : v : w)$ tenemos

$$\begin{aligned}AC^2 + CE^2 &= AB^2 + BE^2 \\ \Rightarrow b^2 + \frac{a^2 v^2}{(v+w)^2} &= c^2 + \frac{a^2 w^2}{(v+w)^2} \\ \Rightarrow (b^2 - c^2)(v+w)^2 &= a^2 w^2 - a^2 v^2 = a^2 (w^2 - v^2) \\ \Rightarrow (b^2 - c^2)(v+w) &= a^2 (w - v) \\ \Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)v &= (a^2 - b^2 + c^2)w.\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos $E = (0 : S_B : S_C)$, e igualmente tendremos $F = (S_A : 0 : S_C)$ y $G = (S_A : S_B : 0)$. Es evidente entonces que AE , BF y CG concurren en el punto $(S_A : S_B : S_C)$, que es el conjugado isotómico del ortocentro $H = (1/S_A : 1/S_B : 1/S_C)$ y que está catalogado como X_{69} en la enciclopedia de Clark Kimberling.

Para construir el punto X_{69} bastará trazar las alturas AX , BY , CZ y hallar los puntos simétricos de E, F, G de X, Y, Z respecto de los puntos medios de los lados correspondientes.

En la figura de la página siguiente hemos trazado las circunferencias con centros B y C y radios BE y CE , respectivamente, y las perpendiculares por B y C a las rectas AB y AC , y así hemos obtenido los puntos B' y C' , que cumplen

$$AB'^2 = AB^2 + BB'^2 = AB^2 + BE^2 = AC^2 + CE^2 = AC^2 + CC'^2 = AC'^2.$$

