

Problema 620

Dado un triángulo ABC, encontrar E sobre la recta BC, F sobre AC y G sobre AB, de manera que

$$AC^2 + CE^2 = AB^2 + BE^2$$

$$BA^2 + AF^2 = BC^2 + CF^2$$

$$CA^2 + AG^2 = CB^2 + BG^2$$

Demostrar que las cevianas AE, BF y CG concurren.

Solución por Antonio Godoy Toharia.

Por el teorema del coseno aplicado a AE tenemos:

$$\begin{aligned} AE^2 &= AB^2 + BE^2 - 2 \cdot AB \cdot BE \cdot \cos B \\ AE^2 &= AC^2 + CE^2 - 2 \cdot AC \cdot CE \cdot \cos C \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la primera igualdad del enunciado obtenemos que:

$$AB \cdot BE \cdot \cos B = AC \cdot CE \cdot \cos C$$

Juguemos ahora un poco con las letras y los signos:

1º)

$$\begin{aligned} AB \cdot BE \cdot \cos B &= -AC \cdot EC \cdot \cos C \\ AB \cdot BE \cdot \cos B &= -AC (BC - BE) \cdot \cos C \\ AB \cdot BE \cdot \cos B &= -AC \cdot BC \cdot \cos C + AC \cdot BE \cdot \cos C \\ BE (AB \cdot \cos B - AC \cdot \cos C) &= -AC \cdot BC \cdot \cos C \end{aligned}$$

$$BE = \frac{AC \cdot BC \cdot \cos C}{AC \cdot \cos C - AB \cdot \cos B}$$

2º)

$$\begin{aligned} AC \cdot EC \cdot \cos C &= -AB \cdot BE \cdot \cos B \\ AC \cdot EC \cdot \cos C &= -AB (BC - EC) \cos B \\ AC \cdot EC \cdot \cos C &= -AB \cdot BC \cdot \cos B + AB \cdot EC \cdot \cos B \\ EC (AC \cdot \cos C - AB \cdot \cos B) &= -AB \cdot BC \cdot \cos B \end{aligned}$$

$$EC = \frac{-AB \cdot BC \cdot \cos B}{AC \cdot \cos C - AB \cdot \cos B}$$

De la misma forma obtenemos que:

$$CF = \frac{BA \cdot CA \cdot \cos A}{BA \cdot \cos A - BC \cdot \cos C}$$

$$FA = \frac{-BC \cdot CA \cdot \cos C}{BA \cdot \cos A - BC \cdot \cos C}$$

$$AG = \frac{CB \cdot AB \cdot \cos B}{CB \cdot \cos B - CA \cdot \cos A}$$

$$GB = \frac{-CA \cdot AB \cdot \cos A}{CB \cdot \cos B - CA \cdot \cos A}$$

Como se cumple que $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AG}{GB} = 1$, por el teorema de Ceva, las tres cevianas concurren.