

Problema 620. -Dado un triángulo ABC, encontrar E sobre la recta BC, F sobre AC y G sobre AB, de manera que

$$AC^2 + CE^2 = AB^2 + BE^2$$

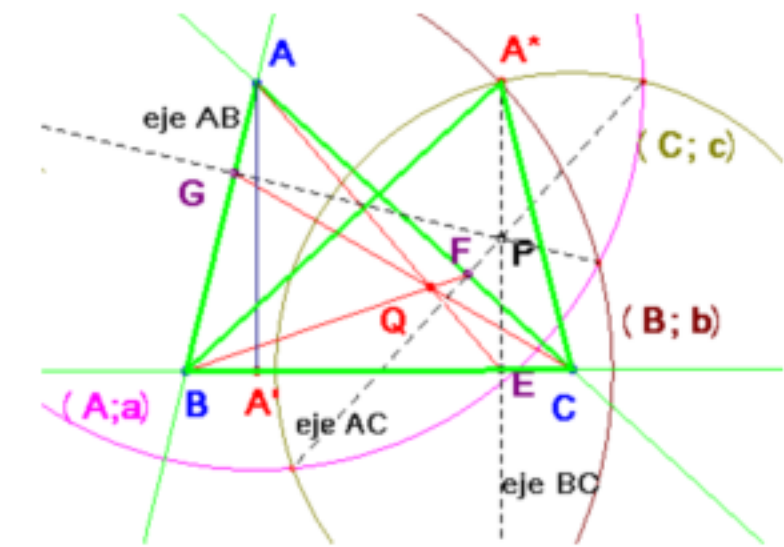
$$BA^2 + AF^2 = BC^2 + CF^2$$

$$CA^2 + AG^2 = CB^2 + BG^2$$

Demostrar que las cevianas AE, BF y CG concurren.

Barroso, R. (2011). Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S. Fray Luis de León de Salamanca.



se procede con F y G.

Denotaremos por (M, r) a la circunferencia de centro M y radio r .

La condición sobre E indica que este punto está sobre las circunferencias $(C; c)$ y $(B; b)$ de ecuaciones respectivas $CX^2 - c^2 = 0$ y $BX^2 - b^2 = 0$. Por tanto está en el eje radical de ambas y también en el lado BC del triángulo ABC .

Estas circunferencias se cortan por ser sus radios los lados b, c de un triángulo y $a < b + c$. Es pues, muy sencillo construir este punto. Análogamente

Sea A^* uno de los puntos de intersección de $(C; c)$ y $(B; b)$. Los triángulos ABC y A^*CB tienen sus lados iguales: son simétricos respecto de la mediatriz de BC . Sus alturas h_A y h_{A^*} son iguales y por tanto $BA' = CE$. Por ello las cevianas AE, BF y CG concurren en el punto Q , conjugado isotómico del ortocentro sin más que aplicar el teorema de Ceva, pues la sustitución de los pies de las alturas por sus simétricos respecto del punto medio del lado respectivo, no hace otra cosa que invertir las tres razones simples que cumplen el teorema de Ceva.

Nota. - Si tenemos las ecuaciones de los ejes radicales de las circunferencias $(C; c)$ $(B; b)$ y $(C; c)$ y $(A; a)$

$$CX^2 - c^2 = BX^2 - b^2$$

$$CX^2 - c^2 = AX^2 - a^2$$

restando esas expresiones resulta $AX^2 - a^2 = BX^2 - b^2$

que es el eje de las circunferencias $(A; a)$ y $(B; b)$. Esto nos indica que los tres ejes concurren en un mismo punto (P en el dibujo). ■