

Sean un triángulo $\widehat{ABC}$ circunscrito a una cónica $\mathcal{C}$, t una tangente arbitraria a $\mathcal{C}$ y P_a el punto de contacto de BC con $\mathcal{C}$.

Consideremos las distancias $d_b = d(B, t)$, $d_c = d(C, t)$, $d_a = d(A, t)$ y $d_1 = d(P_a, t)$. Se cumple que:

$$\frac{d_b d_c}{d_a d_1} = \rho_1$$

es constante.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **621**
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Con el siguiente enunciado:

Sea un triángulo ABC circunscrito a una cónica.

Sea r una recta cualquiera tangente a esa cónica.

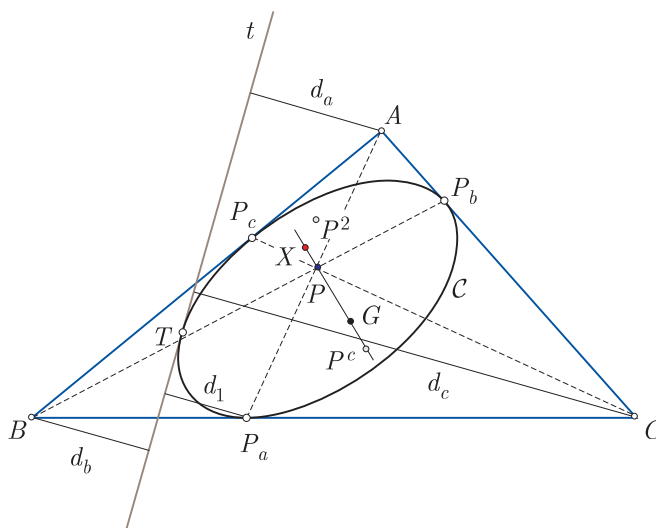
Sea A^ el punto de contacto de BC con la cónica.*

Consideremos $d(B, r)$, $d(C, r)$, $d(A, r)$ y $d(A^, r)$*

Se cumple que $(d(B, r)d(C, r))/(d(A, r)d(A^, r))$ es constante.*

García de Galdeano, Z.(1892) Geometría General. Parte primera. Teoremas, problemas y métodos geométricos. Zaragoza.Imprenta de Calisto Ariño. (p.95)

Utilizaremos coordenadas baricéntricas, lo cual nos sirve. por añadidura, para encontrar el punto X cuyas coordenadas son las cantidades constantes $(\rho_1 : \rho_2 : \rho_3)$ que aparecen en el enunciado, procediendo cíclicamente sobre los vértices del triángulo dado.



Sea la cónica inscrita $\mathcal{C}$ de perspector (punto de Brianchon) $P(p : q : r)$, que tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} - 2\frac{yz}{qr} - 2\frac{zx}{pr} - 2\frac{xy}{pq} = 0.$$

Una recta genérica que pasa por $P_a(0 : q : r)$ se puede poner de la forma:

$$rvx - ruy + quz = 0.$$

Esta recta vuelve a cortar a $\mathcal{C}$ en el punto

$$T(4pq^2u^2 : q(qu + pv)^2 : r(qu - pv)^2).$$

La tangente en T a $\mathcal{C}$ (polar de T respecto a $\mathcal{C}$) es:

$$t \equiv r(q^2u^2 - p^2v^2)x + 2pru(pv - qu)y - 2pqu(qu + pv)z = 0.$$

Las distancias de los puntos A, B, C y P_a a t son, respectivamente:

$$d_a = \left| \frac{rS(qu - pv)(qu + pv)}{\sqrt{\Phi}} \right|, \quad d_b = \left| \frac{2prSu(pv - qu)}{\sqrt{\Phi}} \right|, \quad d_c = \left| \frac{2pqSu(qu + pv)}{\sqrt{\Phi}} \right|, \quad d_1 = \left| \frac{4pq^2rSu^2}{(q + r)\sqrt{\Phi}} \right|.$$

Donde

$$\Phi = r^2 p^4 a^2 v^4 - 4rp^4(qS_B - rS_C)uv^3 + 2p^2(2p^2(q+r)^2S_A + (2p(p-r) - r^2)S_Bq^2 + (2p(p-q) - q^2)r^2S_C)u^2v^2 +$$

$$4p^2q(2p(q^2 - r^2)S_A + (2p+r)S_Bq^2 - (2p+q)r^2S_C)u^3v + q^2(4p^2(q-r)^2S_A + q^2(2p+r)^2S_B + (2p+q)^2r^2S_C)u^4,$$

siendo S el doble del área de $\widehat{ABC}$, $S_A = S \cotg A = (b^2 + c^2 - a^2)/2, \dots$

Con lo que

$$\frac{d_b d_c}{d_a d_1} = \frac{p(q+r)}{qr}$$

es constante, para cada cónica y para cualquier tangente a ella.

NOTA ADICIONAL

Si tomamos los puntos de tangencia, P_b y P_c , de $\mathcal{C}$ con los lados CA y AB , respectivamente, se tienen las correspondientes fracciones de productos de distancias a una tangente arbitraria:

$$\rho_2 = \frac{q(r+p)}{rp}, \quad \rho_3 = \frac{r(p+q)}{pq}.$$

El punto $X(\rho_1 : \rho_2 : \rho_3)$ de coordenadas baricéntricas estas tres constantes obtenidas para una cónica inscrita de perspecto $P(p : q : r)$,

$$\left(\frac{p(q+r)}{qr} : \frac{q(r+p)}{rp} : \frac{r(p+q)}{pq} \right) \equiv (p^2(q+r) : q^2(r+p) : r^2(p+q)),$$

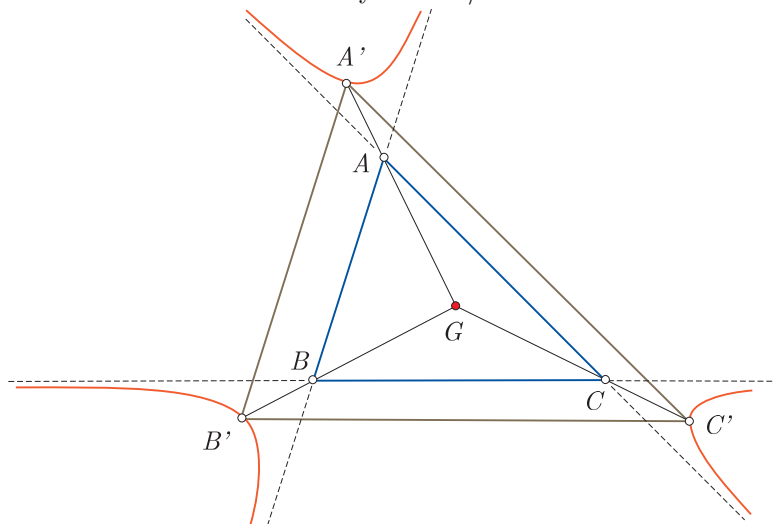
está alineado con P y G (baricentro de $\widehat{ABC}$) es el producto baricéntrico de P por el complemento de P y divide al segmento GP en la razón:

$$GX : XP = - \frac{(p+q+r)(pq+qr+rp)}{3pqr}.$$

Esta razón se anula si el punto X coincide con el baricentro, es decir, cuando P está sobre la elipse circunscrita de Steiner $yz + zx + xy = 0$ o si P está en la recta del infinito, en este caso X recorre en la cúbica:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xy^2 + 3xz^2 + 3yz^2 + 3yx^2 + 3zx^2 + 3zy^2 - 21xyz = 0,$$

que es "Tucker nodal cubic" (<http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/Exemples/k015.html>) respecto al triángulo homotético a $\widehat{ABC}$ mediante la homotecia de centro G y razón $3/2$.



Más en general, si P se mueve en una recta ℓ que no pasa por el baricentro, entonces X recorre una cúbica tangente a los lados de $\widehat{ABC}$ en los puntos de corte de ℓ con ellos y teniendo como punto doble el baricentro.