

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

Problema 622. Sea ABC un triángulo isósceles en B , con base b variable, y lados iguales $a = c$, fijos. Denotamos por R , el radio de su círculo circunscrito, y por r , el radio de su círculo inscrito. Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{R - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{r - \frac{a\sqrt{3}}{6}}.$$

Romero, J.B. (2011): Comunicación personal.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

$$p := \frac{1}{2} \cdot (a + b + c), \quad S := [ABC];$$

$$\frac{(2 \cdot a + b) \cdot r}{2} = \frac{a + b + c}{2} \cdot r = p \cdot r = S = \frac{1}{2} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \frac{b}{2 \cdot R} = \frac{a^2 \cdot b}{4 \cdot R}$$

$$\Rightarrow (2a + b)r2R = a^2b \Rightarrow 4Rra = (a^2 - 2Rr)b \Rightarrow b = \frac{4Rra}{a^2 - 2Rr};$$

$$b \rightarrow a \Leftrightarrow \frac{4Rra}{a^2 - 2Rr} \rightarrow a \Leftrightarrow \frac{4Rr}{a^2 - 2Rr} \rightarrow 1 \Leftrightarrow a^2 - 2Rr \rightarrow 4Rr \Leftrightarrow a^2 \rightarrow 6Rr \Leftrightarrow a \rightarrow \sqrt{6Rr};$$

$$b \rightarrow a = c \Leftrightarrow ABC \xrightarrow{\text{Euler}} \text{equilátero} \Leftrightarrow R \rightarrow (2r)^+;$$

$b \rightarrow a = c \Leftrightarrow ABC \rightarrow \text{equilátero de lado } a \Leftrightarrow r \rightarrow \text{radio del círculo inscrito a un triángulo equilátero de lado } a \Leftrightarrow r \rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{6};$

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{R - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{r - \frac{a\sqrt{3}}{6}} = \lim_{R \rightarrow (2r)^+} \frac{R - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{r - \frac{a\sqrt{3}}{6}} = \lim_{r \rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{6}} \frac{2r - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{r - \frac{a\sqrt{3}}{6}} = \lim_{r \rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{6}} \frac{2 \left(r - \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)}{r - \frac{a\sqrt{3}}{6}} = \lim_{r \rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{6}} 2 = 2.$$