Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Problema 622.

Sea ABC un triángulo isósceles en B, con base b variable , y lados iguales a=c, fijos.

Denotamos por R, el radio de su círculo circunscrito, y por r, el radio de su círculo inscrito.

Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{b\to a} \frac{R-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{r-\frac{a\sqrt{3}}{6}}.$$

Romero, J.B. (2011): Comunicación personal.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Profesor del IES Blas Infante, Córdoba (España).

El cálculo del límite propuesto nos obliga a relacionar las longitudes de las expresiones que conforman el numerador y denominador, cuando el triángulo ABC es equilátero ([b→a $\wedge$ a=c]→[a=b=c].

En este caso límite donde el triángulo isósceles se aproxima al equilátero ABC de altura h se sabe que:

$$\left.\begin{array}{l} R=\frac{2}{3}h \\ r=\frac{1}{3}h \end{array}\right\} \Rightarrow R=2r$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} R-\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}h-\frac{\sqrt{3}}{3}a \\ r-\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{3}h-\frac{\sqrt{3}}{6}a \end{array}\right\} \Rightarrow R-\frac{a\sqrt{3}}{3}=2.(r-\frac{a\sqrt{3}}{6})$$

Y así:

$$\lim_{b\to a} \frac{R-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{r-\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \lim_{r\to\frac{a\sqrt{3}}{6}} \frac{2.(r-\frac{a\sqrt{3}}{6})}{r-\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2$$