Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.
Problema 622

Sea ABC un triángulo isósceles en B, con base b variable, y lados iguales $a = c$, fijos. Denotamos por R, el radio de su círculo circunscrito, y por r, el radio de su círculo inscrito. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{b\to a}\frac{R-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{r-\frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

Solución de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA.

Si $b \to a$ entonces el triángulo ABC tiende a ser equilátero y por tanto $R \to 2r$, de donde el límite buscado es igual a 2. Pero seamos más rigurosos, en general se tiene que:

$$\begin{aligned} R &= \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \\ r &= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \end{aligned}$$

con p el semiperímetro, de donde si $a = c$ obtenemos

$$\begin{aligned} R &= \frac{a^2}{\sqrt{(2a-b)(2a+b)}} \\ r &= \frac{b\sqrt{(2a-b)(2a+b)}}{2(2a+b)} \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{b\to a}\frac{R}{2r} = \lim_{b\to a}\frac{a^2}{b(2a-b)} = 1$$

de donde

$$\lim_{b\to a} R = \lim_{b\to a} 2r \Rightarrow \lim_{b\to a}(R-2r) = 0$$

ahora podemos transformar nuestro límite original el cual es de la forma $\frac{0}{0}$ porque

$$\begin{aligned} \lim_{b\to a} R &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ \lim_{b\to a} r &= \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

veamos

$$\lim_{b\to a}\frac{R-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{r-\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \lim_{b\to a}\frac{R-2r+2r-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{r-\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{\lim_{b\to a}(R-2r)+\lim_{b\to a}(2r-\frac{a\sqrt{3}}{3})}{\lim_{b\to a}(r-\frac{a\sqrt{3}}{6})} = \lim_{b\to a}\frac{2r-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{r-\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2$$