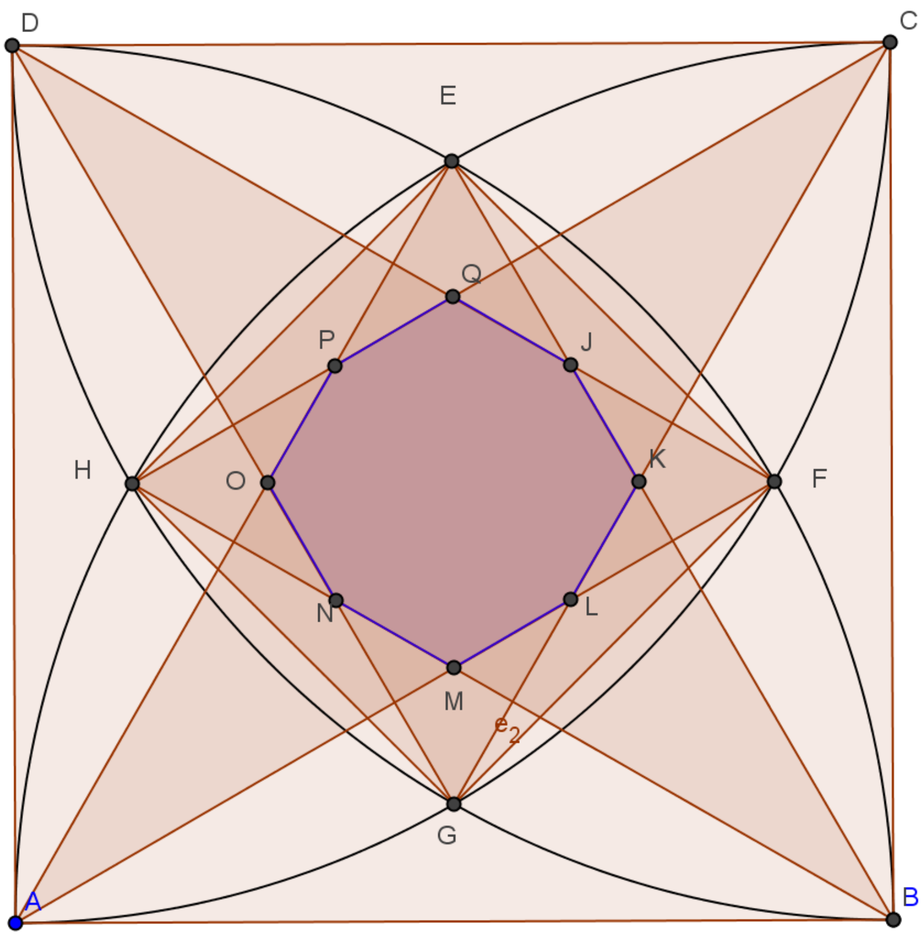
Problema 625.

Sea ABCD un cuadrado de lado 2.



Construyamos los cuatro cuadrantes de circunferencia interiores de centro en cada vértice y radio el lado del cuadrado.

Se cortarán en cuatro puntos interiores, E F G H-

Construyamos los triángulos AFE, BEH, CHG y DGF.

Estos cuatro triángulos dan lugar a un octógono común JKLMNOPQ, cuya área se pide.

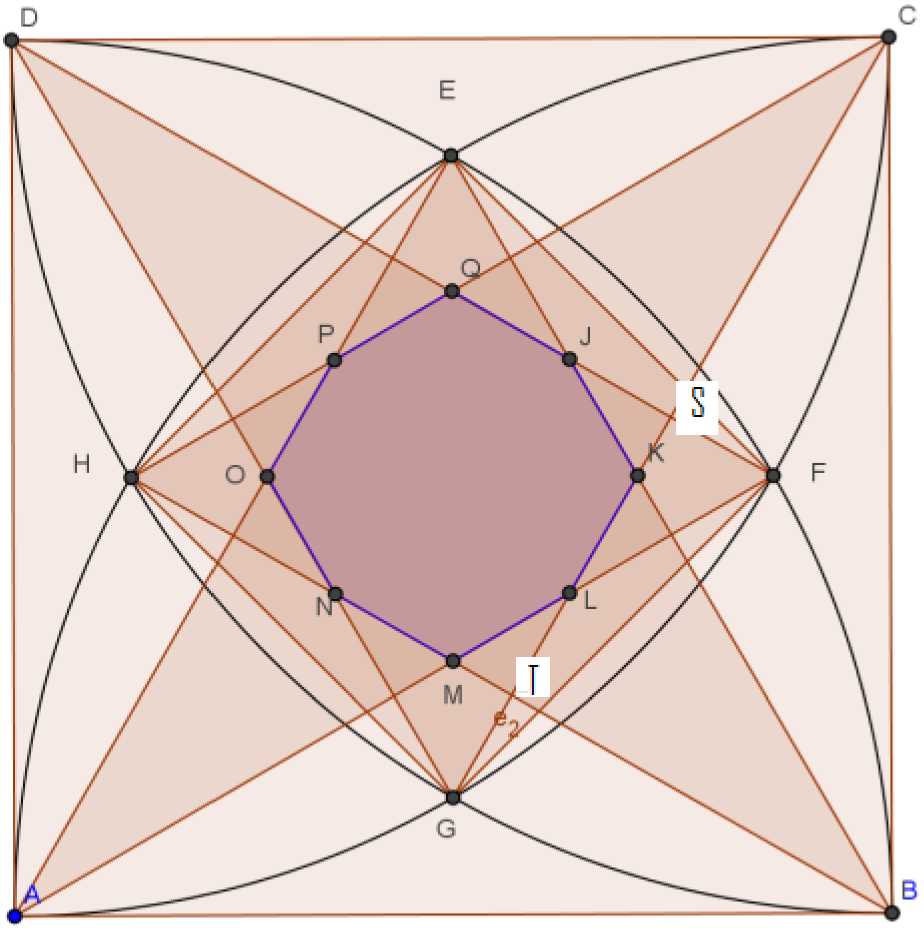
Trigueros, R. (2011): Comunicación personal.

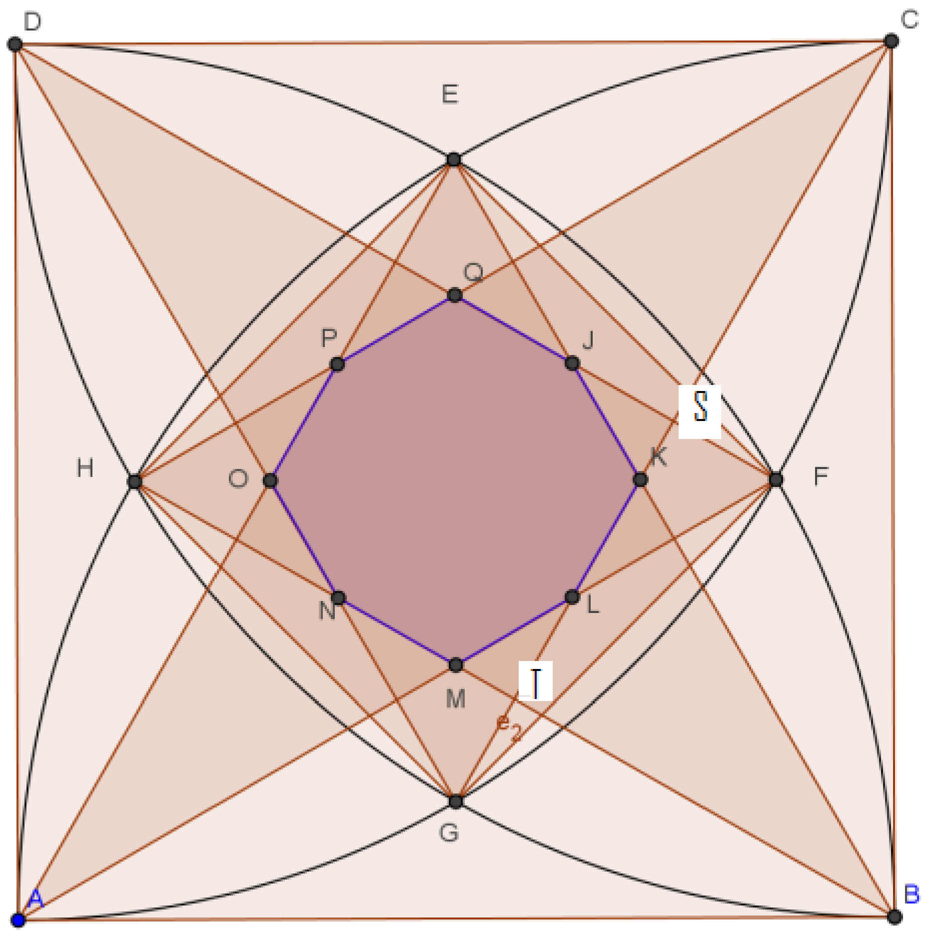
Solución del director.

Lo he resuelto viendo primero el cuadrado formado por las rectas que contienen a los segmentos JK, MN, PO y QJ. Por la simetría de la configuración dada los ángulos son rectos y los cuatro segmentos correspondientes son iguales.

Ese cuadrado no está dibujado, y su lado es relativamente fácil ver que vale

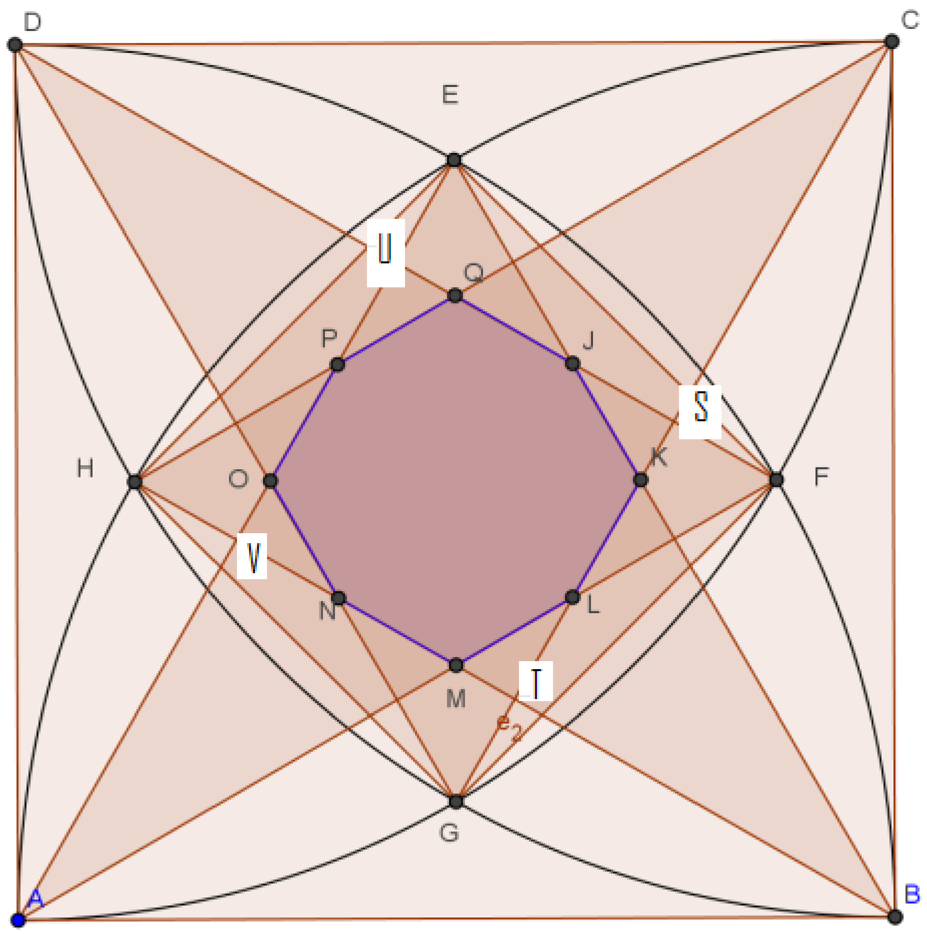
$\sqrt{3}-1$


D
C
E
Q
P
J
S
H
O
K
F
N
L
M
T
e_2
G
A
B



Sea por ejemplo ST. Por los datos del problema el triángulo CSD es 60 90 30, por lo que CD=2, CS=1 y $DS=\sqrt{3}$

En BTC, tenemos por analogía $CT=\sqrt{3}$. Así cqd, $ST=\sqrt{3}-1$



Así , habremos de buscar las áreas de los cuatro triángulos análogos al TLM, y deducirlas del área del cuadrado buscado.

Es claro que TLM es del tipo 90 30 60,

El triángulo BHC es equilátero de lado 2, luego BT mide 1.

El triángulo BMA es isósceles de base 2 y ángulos 30 120 30, por lo que $BM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Así $TM = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$

Haciendo operaciones en TLM, es:

$TL = \frac{\sqrt{63-36\sqrt{3}}}{3}$. Así pues tenemos que:

[JKLMNOPQ]=[USTV]-4[TML]

$$[JKLMNOPQ] = (\sqrt{3}-1)^2 - 2\frac{(2\sqrt{3}-3)}{3}\frac{\sqrt{63-36\sqrt{3}}}{3}$$

Aproximadamente es 0.4529

Ricardo Barroso Campos

Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla