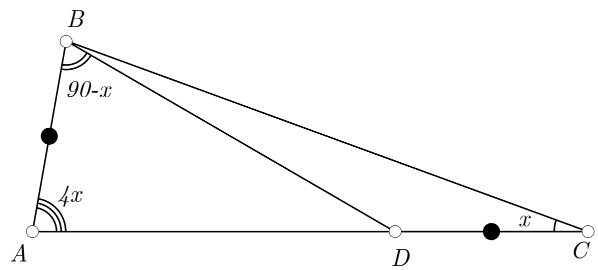
**Problema 626** En la siguiente figura, calcular el valor de $x$:




Triángulo $ABC$, con $D$ sobre el interior de $AC$, $AB = DC$, $\angle BAC = 4\angle BCA$, $\angle ABD = 90° - \angle BCA$.

*Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo.*
*Profesor de I.E.P San "Francisco de Asís". (Huaral), de Perú.*
*Origen desconocido*

**Soluzione di Ercole Suppa**.

Poichè la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a $\pi$ radianti, abbiamo:

$$\frac{\pi}{2} + 4x < \pi \quad \Rightarrow \quad 4x < \frac{\pi}{2}$$

Dal teorema dei seni applicato ai triangoli $\triangle CDB$ e $\triangle ACD$ abbiamo:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)}{\sin x} = \frac{\cos 4x}{\sin x} \tag{1}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)}{\sin 4x} = \frac{\cos 3x}{\sin 4x} \tag{2}$$

Da (1) e (2), tenuto conto che $AB = DC$, discende che

$$\frac{\cos 4x}{\sin x} = \frac{\cos 3x}{\sin 4x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin 4x \cos 4x = \sin x \cos 3x \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin 8x = \sin 4x - \sin 2x \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin 8x + \sin 2x = \sin 4x \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \sin 5x \cos 3x = \sin 4x \tag{3}$$

E' immediato verificare che $x = \frac{\pi}{9}$ verifica l'equazione (3), in quanto

$$2 \sin \frac{5\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9}$$

Per concludere dimostriamo che $x = \frac{\pi}{9}$ è l'unica soluzione dell'equazione (3) nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Distinguiamo due casi:

- Supponiamo che $x > \frac{\pi}{9}$ sia un'altra soluzione della (3) ed osserviamo che $3x > \frac{\pi}{3}$, per cui $\cos 3x < \frac{1}{2}$. Pertanto dalla (3) segue che:

  $$\sin 4x < \sin 5x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 4x < \sin(\pi - 5x) \tag{4}$$

  Dalla (4), osservato che $4x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $5x \in \left(\frac{5}{9}\pi, \frac{5}{8}\pi\right)$, abbiamo:

  $$4x < \pi - 5x \quad \Rightarrow \quad x < \frac{\pi}{9}$$

  e ciò è assurdo, avendo supposto $x > \frac{\pi}{9}$.

- Supponiamo che $x < \frac{\pi}{9}$ sia un'altra soluzione della (3) ed osserviamo che $3x < \frac{\pi}{3}$, per cui $\cos 3x > \frac{1}{2}$. Pertanto dalla (3) segue che:

  $$\sin 4x > \sin 5x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 4x > \sin(\pi - 5x) \tag{5}$$

  Ora, se $5x \leq \frac{\pi}{2}$ da (5) segue che $5x < 4x$ il che è assurdo; se invece $5x > \frac{\pi}{2}$ allora $\pi - 5x < \frac{\pi}{2}$ e dalla (5) segue $\pi - 5x < 4x$ ossia $x > \frac{\pi}{9}$, contraddicendo l'ipotesi che $x < \frac{\pi}{9}$.

Concludiamo che $x = \frac{\pi}{9}$ è l'unica soluzione di (3). $\square$