Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

***Problema* 627**.- *Sea ABC un triángulo acutángulo inscrito en la circunferencia Ω y centro O. Sean los puntos B', C' sobre Ω, tales que los triángulos AB'B y AC'C sean rectángulos en A, respectivamente. Sea $H_a$ el pie de la altura trazada desde A, a su lado opuesto BC. Definimos los puntos C"=AB'·OC, B"=AC'·OB, D=AC·BB' y E=AB·CC'.*

*Sean $J_a$=BC'·C"D, $K_a$=CB'·B"E.*

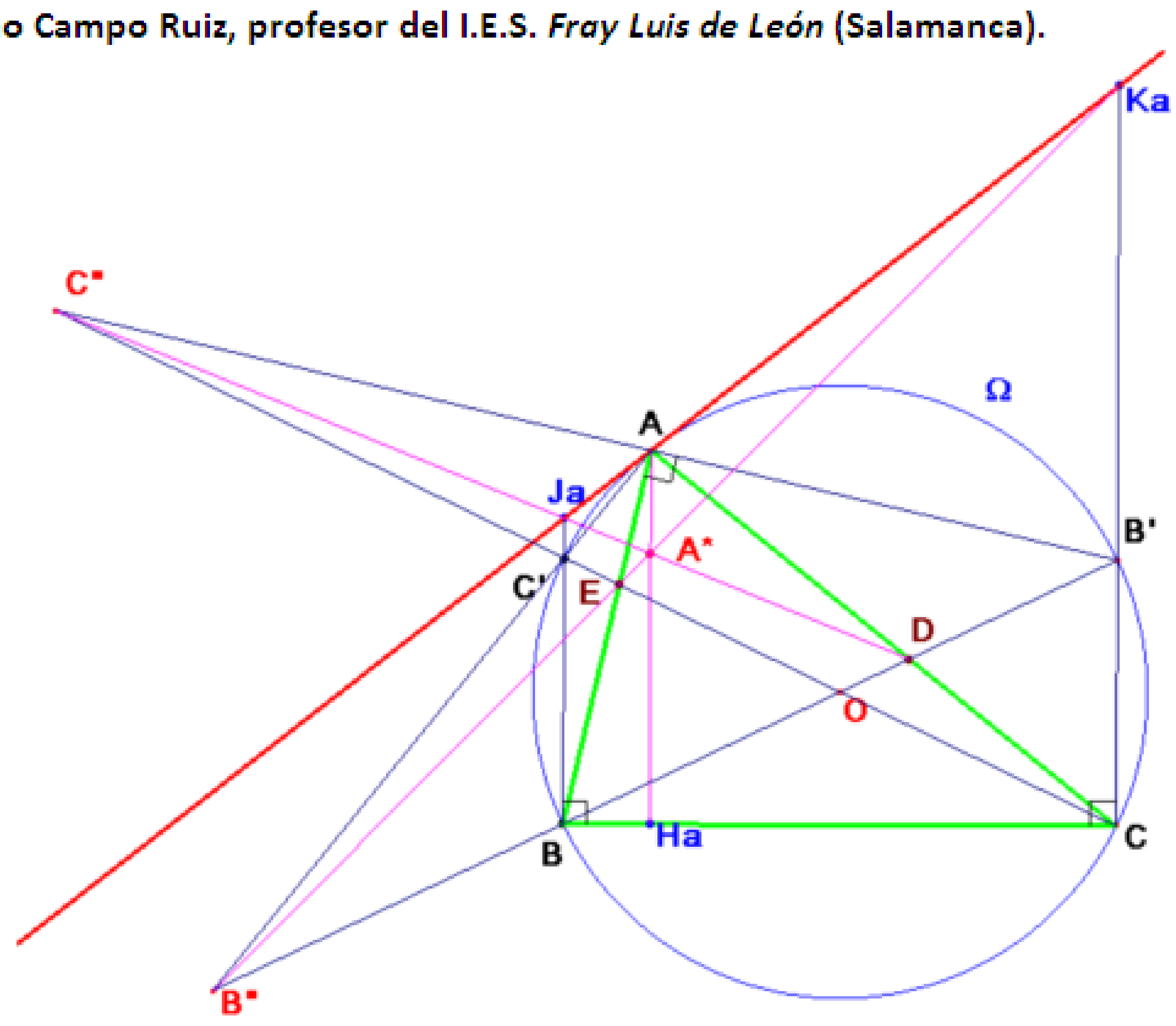
*Se pide:*

*a) Probar que $AH_a$, B"E, C"D, se cortan en el punto A*.*

*b) Los puntos A, $J_a$, $K_a$, están alineados.*

Romero, J.B. (2011): Comunicación personal.

**Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S. *Fray Luis de León* (Salamanca).**




Se observa de inmediato en la figura que las rectas *BC'* y *B'C* son perpendiculares a la base *BC*, y en consecuencia, paralelas entre sí y también a la altura $AH_a$ (y concurrentes en el infinito). Además, los puntos *A*, $J_a$, $K_a$ están situados sobre la tangente en *A*. Podemos llevar estos datos al plano proyectivo, en el cual la circunferencia Ω se sustituye por una cónica cualquiera, su centro por un punto cualquiera del plano no situado en Ω y por los puntos *B'* y *C'* se toman las proyecciones de *B* y *C* desde *O* sobre Ω. Con esto tendríamos el siguiente enunciado alternativo, que generaliza el inicial:

*Sean ABC un triángulo inscrito en la cónica Ω y O un punto cualquiera no situado sobre ella. Sean B', C' las proyecciones de los puntos B, C desde O sobre Ω.*

*Definimos los puntos C"=AB'·OC, B"=AC'·OB, D=AC·BB' y E=AB·CC'. Sean $J_a$=BC'·C"D, $K_a$=CB'·B"E.*

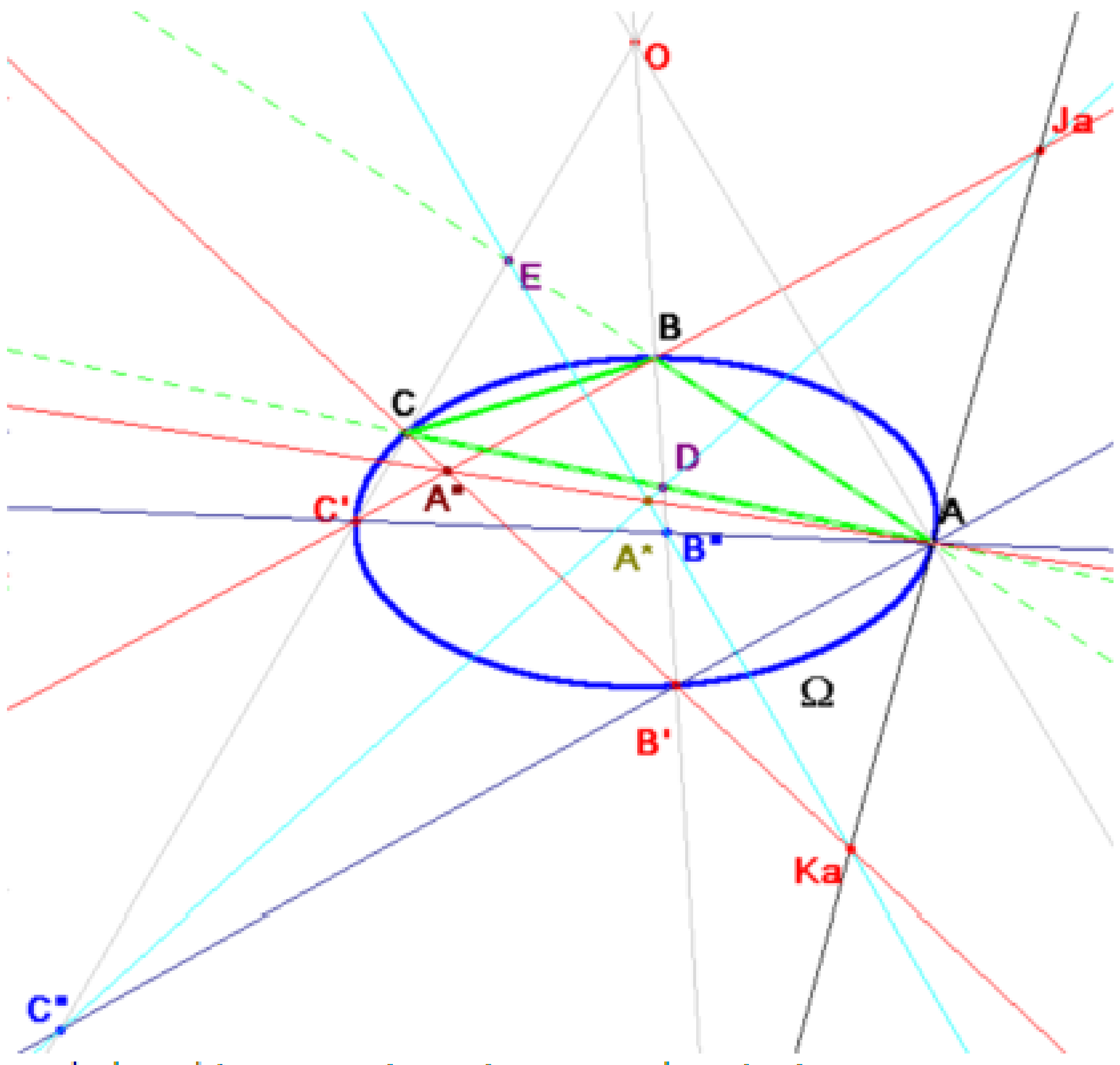
*Se pide: a) Probar que A, A*= C"D·B"E y A"=BC'·B'C están alineados.*

*b) Los puntos A, $J_a$, $K_a$, están alineados (pertenecen a la tangente en A).*

Tomaremos como sistema de referencia del plano proyectivo el formado por los vértices del triángulo y el punto *O*:

$\mathfrak{R}=\{A,B,C;O\}$ ; $A=\lambda\,(1,0,0)$; $B=\lambda\,(0,1,0)$; $C=\lambda\,(0,0,1)$, $O=\lambda(1,1,1)$.

Es fácil ver que la expresión en coordenadas homogéneas de la cónica en esta referencia es $cxy+ayz+bzx=0$ con $abc\neq 0$ y $a+b+c\neq 0$ como únicas condiciones sobre los coeficientes.




Las coordenadas y ecuaciones de los objetos que intervienen son las siguientes:

**Puntos:**

$B'=\lambda(a+c,-b,a+c)$; $C'=\lambda(a+b,a+b,-c)$; $D=\lambda(1,0,1)$;

$E=\lambda(1,1,0)$; $B"=\lambda(c,-a-b,c)$; $C"=\lambda(b,b,-a-c)$.

**Rectas:**

$C"D\equiv b(x-z)=(a+b+c)y$; $B"E\equiv c(x-y)=(a+b+c)z$ (cambiando *y* por *z* y *b* por *c*).

$BC'\equiv cx+(a+b)z=0$

$B'C\equiv bx+(a+c)y=0$

Polar de *A* = Tangente en *A*: $cy+bz=0$.

**a)** Para calcular la recta $AA^*$ sin calcular éste último punto, tomo el haz de rectas definido por *C"D* y *B"E* y le impongo la condición de pasar por el punto *A*.

$$\alpha(b(x-z)-(a+b+c)y)+\beta(c(x-y)-(a+b+c)z)=0.\quad \alpha b+\beta c=0.$$

Se obtiene así $AA^*\equiv c(a+c)y=b(a+b)z$.

Si quiero calcular la recta *AA"* sin calcular expresamente *A"*, hago lo mismo pero ahora con las rectas *BC'* y *B'C* y obtengo que $AA"\equiv c(a+c)y=b(a+b)z$. Con esto queda probado a)

**b)** Con los datos anteriores se calculan los puntos $J_a$ y $K_a$:

$J_a=\lambda(a+b,b,-c)$

$K_a=\lambda(a+c,-b,c)$

Y resulta inmediato comprobar que esos puntos pertenecen a la tangente en *A*.

Esta segunda parte se puede demostrar fácilmente sin coordenadas. Basta considerar en la cónica la proyectividad definida haciendo corresponder a la terna (*A*,*B*,*C*) la terna (*B'*,*C'*,*A*).

π:(*A*,*B*,*C*) --> (*B'*,*C'*,*A*)

El eje de la misma se forma con los puntos $AC'\cdot BB'=B"$; $CC'\cdot BA=E$. Es la recta *B"E* y ha de alcanzar a la recta *CB'* en un punto de la tangente en *A*.

Dado que *CB'*·*B"E* =$K_a$, queda probado que $K_a$ está en la tangente.

También puede llegarse a esa conclusión aplicando el teorema de Pascal al *hexágono* inscrito *C' A A B B' C*.

Si se considera la proyectividad definida por:

σ:(*A*,*B*,*C*) --> (*C'*,*A*,*B'*)

razonando de la misma forma obtenemos la pertenencia de $J_a$ a la tangente, o bien aplicando el teorema de Pascal al *hexágono* inscrito *B' A A C C' B*.■