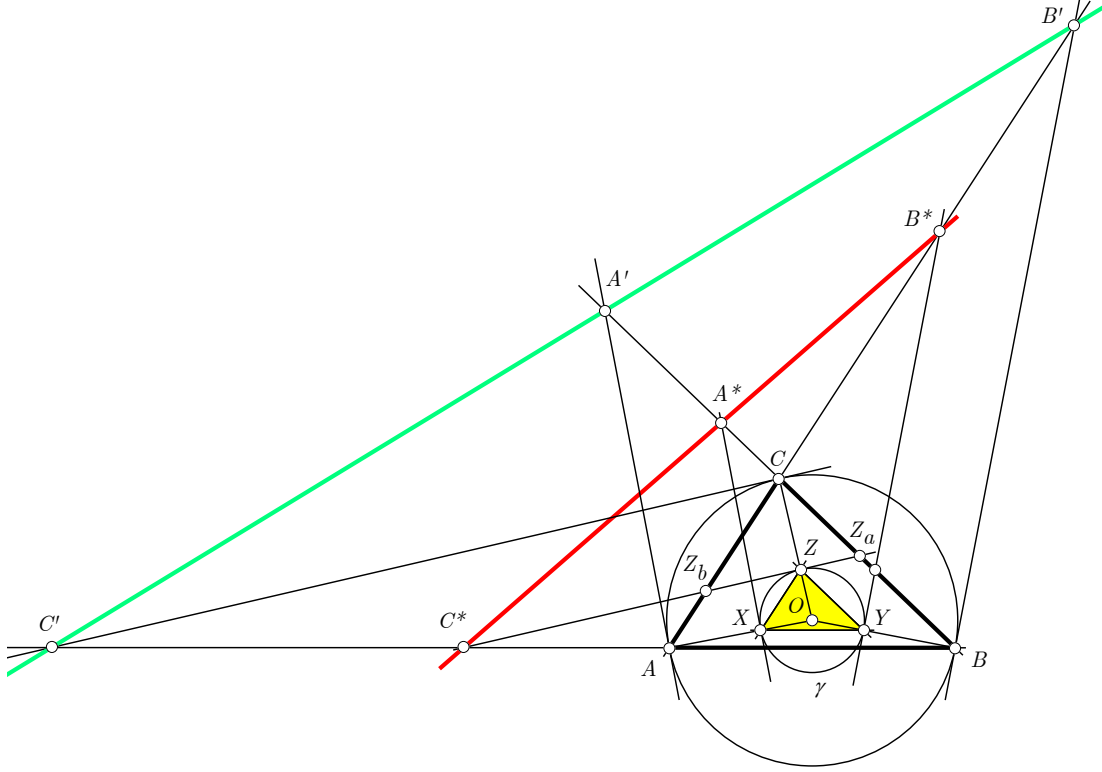


Problema 629. Generalización de la recta de Pascal. Sea ABC un triángulo. Sean a, b y c las rectas BC, CA y AB . Sean s_a, s_b y s_c las rectas tangentes a una circunferencia concéntrica a la circunscrita por los puntos de corte de las semirectas OA, OB y OC . Sean A^*, B^* y C^* las intersecciones de las rectas $a, s_a; b, s_b$ y c, s_c . Demostrar que A^*, B^*, C^* están alineados.

Propuesta del director: Barroso R. (2011), Comunicación personal

Soluzione di Ercole Suppa. Usiamo le usuali notazioni della geometria del triangolo: $BC = a, CA = b, AB = c$, O circoncentro, R circonraggio di $\triangle ABC$.



Siano t_a, t_b, t_c le tangenti ad (O) nei punti A, B, C rispettivamente; siano $A' = t_a \cap BC, B' = t_b \cap CA, C' = t_c \cap AB$; sia γ una circunferenza concéntrica ad (O) e siano $X = \gamma \cap OA, Y = \gamma \cap OB, Z = \gamma \cap OC$.

Dal **problema 628** sappiamo che A', B', C' sono allineati e quindi, per il teorema di Menelao:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1 \quad (1)$$

Poniamo $AX = BY = CZ = k, Z_a = s_a \cap BC, Z_b = s_b \cap AC$. Dai triangoli rettangoli CZZ_a e CZZ_b abbiamo

$$CZ_a = \frac{CZ}{\cos(90^\circ - A)} = \frac{k}{\sin A} = \frac{2kR}{a}, \quad CZ_b = \frac{CZ}{\cos(90^\circ - B)} = \frac{k}{\sin B} = \frac{2kR}{b} \quad (2)$$

Dalla similitudine dei triangoli, $\triangle C'CA \sim \triangle C * Z_bA$, tenuto conto di (2) segue che

$$C^*A = \frac{Z_bA}{CA} \cdot C'A = \frac{b - \frac{2kR}{b}}{b} \cdot C'A = (b^2 - 2kR) \cdot C'A \quad (3)$$

Dalla similitudine dei triangoli, $\triangle C'CB \sim \triangle C * Z_aB$, tenuto conto di (2) segue che

$$C^*B = \frac{Z_aB}{CB} \cdot C'B = \frac{a - \frac{2kR}{a}}{a} \cdot C'B = (a^2 - 2kR) \cdot C'B \quad (4)$$

Dalle (1),(3),(4) e dalle analoghe relazioni relative a B^*A, B^*C, A^*B, A^*C discende che

$$\frac{BA^*}{A^*C} \cdot \frac{CB^*}{B^*A} \cdot \frac{AC^*}{C^*B} = \frac{b^2 - 2kR}{a^2 - 2kR} \cdot \frac{c^2 - 2kR}{b^2 - 2kR} \cdot \frac{a^2 - 2kR}{c^2 - 2kR} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1$$

Pertanto A^*, B^*, C^* sono allineati per il teorema di Menelao. □