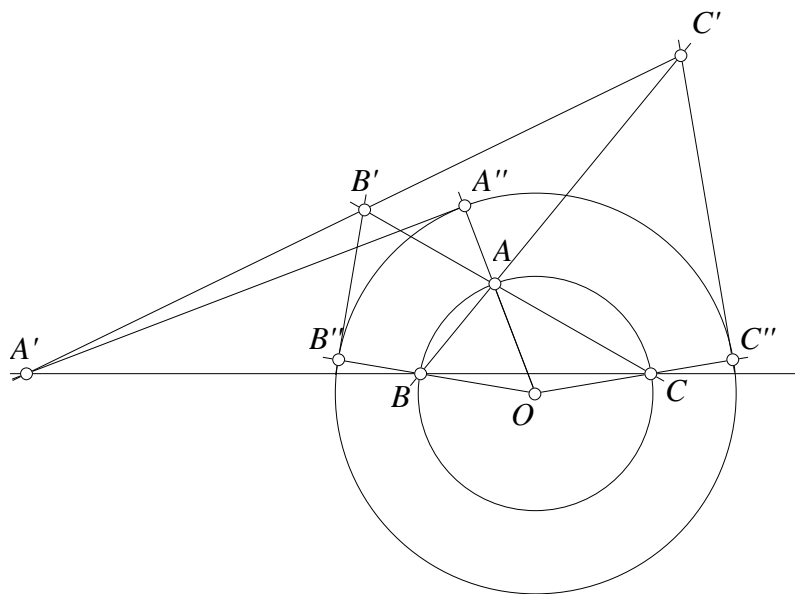


Problema 629 de triángulos cabri. Sea ABC un triángulo. Sean s_a , s_b y s_c las rectas tangentes a una circunferencia concéntrica a la circunscrita por los puntos de corte de las semirrectas OA , OB y OC , y sean las intersecciones $A' = s_a \cap BC$, $B' = s_b \cap CA$, $C' = s_c \cap AB$. Demostrar que A' , B' y C' están alineados..

Propuesto por Ricardo Barroso Campos.



Solución de Francisco Javier García Capitán

Supongamos que la circunferencia concéntrica a la circunscrita tiene radio λ . Hemos visto (Problema 628) que para $\lambda = R$, los puntos A' , B' , C' están alineados y que la recta que los contiene es la polar trilineal del punto simediano K . Es razonable pensar que si también lo están para cualquier λ , entonces, la recta que contiene a los puntos $A'B'C'$ será la polar trilineal de un punto P que describirá un lugar geométrico que contenga a K .

Realizaremos la investigación con coordenadas baricéntricas, y haremos uso del paquete *Baricentricas* disponible en <http://garciacapitan.99on.com>.

Para comenzar, iniciamos una sesión de *Mathematica* y cargamos el paquete *Baricentricas*:

```
<< Baricentricas` ;
```

Teniendo en cuenta que la semirrecta OA cortará a la circunferencia de radio λ en un punto A'' tal que $OA'' : A''A = \lambda : (R - \lambda)$, obtenemos el punto A'' y los correspondientes B'' y C'' para los otros vértices.

```

ptA2 = DividirRazon [ptO, ptA, λ, R - λ];
ptB2 = DividirRazon [ptO, ptB, λ, R - λ];
ptC2 = DividirRazon [ptO, ptC, λ, R - λ];

```

El siguiente paso es obtener los puntos de intersección A', B', C' de los lados BC, CA, AB con las tangentes en los puntos A'', B'', C'' :

```

ptA1 = Punto [Perpendicular [ptA2, ptA2, ptO], Recta [ptB, ptC]];
ptB1 = Punto [Perpendicular [ptB2, ptB2, ptO], Recta [ptC, ptA]];
ptC1 = Punto [Perpendicular [ptC2, ptC2, ptO], Recta [ptA, ptB]];

```

Comprobamos que los puntos A', B' y C' están alineados:

```
Factor [Det [{ptA1, ptB1, ptC1}]]
```

0

Ahora hallamos el polo trilineal de la recta que contiene a los tres puntos A', B', C' .

```
ptP = Factor [PoloTrilineal [Recta [ptB1, ptC1]]]
```

$$\left\{ \begin{aligned} &a^2 (a^4 R - 2 a^2 b^2 R + b^4 R - 2 a^2 c^2 R + c^4 R - 2 b^2 c^2 \lambda), \\ &b^2 (a^4 R - 2 a^2 b^2 R + b^4 R - 2 b^2 c^2 R + c^4 R - 2 a^2 c^2 \lambda), \\ &c^2 (a^4 R + b^4 R - 2 a^2 c^2 R - 2 b^2 c^2 R + c^4 R - 2 a^2 b^2 \lambda) \end{aligned} \right\}$$

Eliminando λ obtenemos el lugar geométrico del punto P al variar λ , y vemos que se trata de una recta:

```
Eliminate [{x, y, z} == k ptP, {k, λ}]
```

$$a^2 y - c^2 y - a^2 z + b^2 z = (b^2 - c^2) x$$

En efecto, $(b^2 - c^2)x + (c^2 - a^2)y + (a^2 - b^2)z = 0$ es la ecuación de la recta GK , que une el baricentro y el punto simedianal. Finalmente, la instrucción

```
Factor [RazonSimple [ptK, ptP, ptG]]
```

$$\frac{6 a^2 b^2 c^2 (R - \lambda)}{(a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2) R}$$

nos permite ubicar P dentro de dicha recta: La recta que contiene a A', B', C' es la polar trilineal del punto P sobre GK tal que

$$\frac{KP}{PG} = \frac{6R(\lambda - R)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Esta fórmula muestra cómo este problema generaliza al Problema 628: Para $\lambda = R$ tenemos $P = K$ y la recta $A'B'C'$ es la polar trilineal del punto simedianal.

La generalización de Lim Sung Hyun

Hemos visto cómo el Problema 629, que es una generalización del Problema 628, tiene una solución que es una generalización de la de aquél. Concretamente, la recta $A'B'C'$ que en el Problema 628 era la polar trilineal del punto simediano K , en el Problema 629 es la polar trilineal de un punto que está sobre la recta GK .

¿Se puede generalizar más? ¿Cuál sería la versión proyectiva de este problema? Tengo la suerte de conocer y tener contacto con un estudiante coreano, cuyo nombre es Lim Sung Hyun, que todavía no ha iniciado sus estudios universitarios, pero que tiene ya unos conocimientos notables de geometría y, a continuación está su respuesta a esta pregunta.

Generalización de Lim Sung Hyun. Sean ABC un triángulo y m una recta. Sean Γ una cónica circunscrita al triángulo, con perspector U , y M el polo de la recta m respecto de Γ . Sean X e Y los puntos de intersección de la recta m y la circunconica Γ , y Γ' cualquier otra cónica tangente a MX y MY en los puntos X e Y . Supongamos que las rectas MA , MB , MC cortan a la cónica Γ' en los pares de puntos (X_1, X_2) , (Y_1, Y_2) , (Z_1, Z_2) . Llamemos A_1, A_2 a los puntos de intersección de la recta BC con las tangentes a Γ' trazadas por A_1, A_2 respectivamente, y definamos B_1, B_2 sobre CA y C_1, C_2 sobre AB de forma semejante. Entonces, hay una ordenación de los pares (A_1, A_2) , (B_1, B_2) , (C_1, C_2) tales que los puntos A_1, B_1, C_1 por un lado y A_2, B_2, C_2 por otro están alineados. Además, los tripolos de las rectas $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ están sobre la recta que une el perspector U y el tripolo de la recta m .

Detallemos cómo este enunciado generaliza al Problema 629:

- Sean ABC un triángulo y m una recta. En nuestro caso, la recta m es la recta del infinito.
- Sean Γ una cónica circunscrita al triángulo con perspector U , Recordemos que las tangentes a la circunferencia circunscrita a ABC por los vértices forman un triángulo perspectivo con ABC y cuyo centro de perspectiva (perspector) es el punto simediano K . Así en nuestro caso, Γ es la circunferencia circunscrita a ABC y $U = K$.
- y M el polo de la recta m respecto de Γ . El centro de una cónica es el polo de la recta del infinito, por tanto, en nuestro caso tenemos $M = O$.

- Sean X e Y los puntos de intersección de la recta m y la circuncónica Γ . Sabemos que la recta del infinito corta a cualquier circunferencia en dos puntos imaginarios conocidos como los puntos circulares.
- y Γ' cualquier otra cónica tangente a MX y MY en los puntos X e Y . La cónica Γ' sustituye a la circunferencia concéntrica a la circunscrita; para que dos cónicas tengan la misma dirección y sean semejantes, las cónicas deben tener los mismos puntos en el infinito, que son la intersección de la cónica con la recta del infinito, y que en el caso general que estamos construyendo, es la recta m la que ha sustituido a la recta del infinito.
- Además, los tripolos de las rectas $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ están sobre la recta que une el perspector U y el tripolo de la recta m . Hemos dicho que U , el perspector de la cónica, se corresponde con el punto simediano en el caso particular, y observemos que el polo trilineal de la recta del infinito es el baricentro G , por lo que en el Problema 629 obtenemos la recta GK como lugar geométrico de los tripolos de las rectas $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$.

