

# Generalización al problema 629 de triánguloscabri.

Problema propuesto por Ricardo Barroso Campos.

Generalización propuesta por Lim Sung Hyun.

Cálculos con *Mathematica* por Francisco Javier García Capitán.

**Generalización de Lim Hyun Sung.** Sean  $ABC$  un triángulo y  $m$  una recta. Sean  $\Gamma$  una cónica circunscrita al triángulo, con perspector  $U$ , y  $M$  el polo de la recta  $m$  respecto de  $\Gamma$ . Sean  $X$  e  $Y$  los puntos de intersección de la recta  $m$  y la circuncónica  $\Gamma$ , y  $\Gamma'$  cualquier otra cónica tangente a  $MX$  y  $MY$  en los puntos  $X$  e  $Y$ . Supongamos que las rectas  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  cortan a la cónica  $\Gamma'$  en los pares de puntos  $(X_1, X_2)$ ,  $(Y_1, Y_2)$ ,  $(Z_1, Z_2)$ . Llamemos  $A_1, A_2$  a los puntos de intersección de la recta  $BC$  con las tangentes a  $\Gamma'$  trazadas por  $A_1, A_2$  respectivamente, y definamos  $B_1, B_2$  sobre  $CA$  y  $C_1, C_2$  sobre  $AB$  de forma semejante. Entonces, hay una ordenación de los pares  $(A_1, A_2)$ ,  $(B_1, B_2)$ ,  $(C_1, C_2)$  tales que los puntos  $A_1, B_1, C_1$  por un lado y  $A_2, B_2, C_2$  por otro están alineados. Además, los tripolos de las rectas  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$  están sobre la recta que une el perspector  $U$  y el tripolo de la recta  $m$ .

<< Baricentricas`;

Sean  $ABC$  un triángulo y  $m$  una recta. Consideramos la recta  $m$  de ecuación  $px + qy + rz = 0$ .

$m = \{p, q, r\};$

Sea  $\Gamma$  una cónica circunscrita al triángulo, con perspector  $U$ , y  $M$  el polo de la recta  $m$  respecto de  $\Gamma$ .

$ptU = \{u, v, w\};$

$coC = u y z + v z x + w x y;$

$ptM = \text{PoloConica}[m, coC]$

$\{u(-p u + q v + r w), v(p u - q v + r w), w(p u + q v - r w)\}$

Sean  $X$  e  $Y$  los puntos de intersección de la recta  $m$  y la circuncónica  $\Gamma$ .

$sust = \sqrt{-4 p q u v x^2 + (p u x + q v x - r w x)^2} \rightarrow R x;$

$\{ptX, ptY\} = \text{Map}[\text{Simplificar},$

$\text{Simplify}[\text{Factor}[\{x, y, z\} /. \text{Solve}[\{coC == 0, m.\{x, y, z\} == 0\}, \{y, z\}] /. sust], x > 0]]$

$\{\{2 q r u, -r(R + p u + q v - r w), q(R - p u + q v - r w)\},$

$\{2 q r u, r(R - p u - q v + r w), -q(R + p u - q v + r w)\}\}$

y  $\Gamma'$  cualquier otra cónica tangente a  $MX$  y  $MY$  en los puntos  $X$  e  $Y$ .

Necesitamos construir la cónica degenerada formada por las dos rectas  $MX$  y  $MY$ , y formar el haz de cónicas generado por esta cónica y la cónica  $\Gamma$ .

$\text{Factor}[-4 p q u v x^2 + (p u x + q v x - r w x)^2]$

$(p^2 u^2 - 2 p q u v + q^2 v^2 - 2 p r u w - 2 q r v w + r^2 w^2) x^2$

conicaMXMY =

Last[Factor[Expand[Factor[(Recta[ptX, ptM].{x, y, z})(Recta[ptY, ptM].{x, y, z})]] /.  
 $R^2 \rightarrow p^2 u^2 - 2 p q u v + q^2 v^2 - 2 p r u w - 2 q r v w + r^2 w^2$ ]]]

$$p^2 u v w x^2 + p^2 u^2 w x y + q^2 v^2 w x y - 2 p r u w^2 x y - 2 q r v w^2 x y + r^2 w^3 x y + \\ q^2 u v w y^2 + p^2 u^2 v x z - 2 p q u v^2 x z + q^2 v^3 x z - 2 q r v^2 w x z + r^2 v w^2 x z + \\ p^2 u^3 y z - 2 p q u^2 v y z + q^2 u v^2 y z - 2 p r u^2 w y z + r^2 u w^2 y z + r^2 u v w z^2$$

Así formamos el haz de cónicas:

r1 = conicaMXMY + λ coC

$$p^2 u v w x^2 + p^2 u^2 w x y + q^2 v^2 w x y - 2 p r u w^2 x y - 2 q r v w^2 x y + r^2 w^3 x y + \\ q^2 u v w y^2 + p^2 u^2 v x z - 2 p q u v^2 x z + q^2 v^3 x z - 2 q r v^2 w x z + r^2 v w^2 x z + p^2 u^3 y z - \\ 2 p q u^2 v y z + q^2 u v^2 y z - 2 p r u^2 w y z + r^2 u w^2 y z + r^2 u v w z^2 + (w x y + v x z + u y z) \lambda$$

Hallamos los puntos de intersección X1 y X2 de la recta MA con la cónica Γ'.

solz = Solve[Recta[ptM, ptA].{x, y, z} == 0, z][[1]]

$$\left\{ z \rightarrow \frac{w(-pu - qv + rw)y}{v(-pu + qv - rw)} \right\}$$

solx = Simplify[Solve[Last[Factor[r1 /. solz]] == 0, x],

{pu - qv + rw > 0, y > 0, p > 0, v > 0}] /. Abs[pu - qv + rw] → pu - qv + rw

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\left( y \left( (pu - qv + rw) \sqrt{\lambda(p^2 u^2 + q^2 v^2 - 2 q r v w + r^2 w^2 - 2 p u (q v + r w) + \lambda)} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (pu - qv + rw) (p^2 u^2 - pu (q v + r w) + \lambda) \right) \right) / (p v (pu - qv + rw)^2) \right\}, \\ \left\{ x \rightarrow \left( y \left( (pu - qv + rw) \sqrt{\lambda(p^2 u^2 + q^2 v^2 - 2 q r v w + r^2 w^2 - 2 p u (q v + r w) + \lambda)} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. (pu - qv + rw) (p^2 u^2 - pu (q v + r w) + \lambda) \right) \right) / (p v (pu - qv + rw)^2) \right\} \}$$

{ptX1, ptX2} = Map[Simplificar, {x, y, z} /. solz /. solx] /.  
 $\sqrt{\lambda(p^2 u^2 + q^2 v^2 - 2 q r v w + r^2 w^2 - 2 p u (q v + r w) + \lambda)} \rightarrow T$

$$\left\{ \left\{ -T - p^2 u^2 + p u (q v + r w) - \lambda, p v (pu - qv + rw), p w (pu + qv - rw) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ T - p^2 u^2 + p u (q v + r w) - \lambda, p v (pu - qv + rw), p w (pu + qv - rw) \right\} \right\}$$

Los demás puntos de intersección los hallamos mediante una permutación cíclica de las coordenadas. Como la sustitución {p → q, q → r, r → p} no está definida en baricentricas.nb, la añadimos aquí:

ReglaDePermutacion = Union[ReglaDePermutacion, {p → q, q → r, r → p}]

$$\{a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a, p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow p, \\ u \rightarrow v, v \rightarrow w, w \rightarrow u, x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x, \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \alpha\}$$

{ptY1, ptY2} = Map[PermutarTerna, {ptX1, ptX2}];

{ptZ1, ptZ2} = Map[PermutarTerna, {ptY1, ptY2}];

Calculamos el punto de intersección con BC de la tangente a Γ' en el punto A1. Lo mismo calculamos B1, C1 y A2, B2, C2.

ptA1 = Punto[PolarConica[ptX1, r1], rtBC];

ptB1 = Punto[PolarConica[ptY1, r1], rtCA];

ptC1 = Punto[PolarConica[ptZ1, r1], rtAB];

ptA2 = Punto[PolarConica[ptX2, r1], rtBC];

ptB2 = Punto[PolarConica[ptY2, r1], rtCA];

ptC2 = Punto[PolarConica[ptZ2, r1], rtAB];

Comprobamos que A1, B1, C1 y A2, B2, C2 están alineados.

Det[{ptA1, ptB1, ptC1}]

0

**Det[{ptA2, ptB2, ptC2}]**

0

Podemos calcular las rectas A1B1C1, A2B2C2 y comprobar que son polares trilineales de puntos no demasiado complicados.

**rtA1B1C1 = Factor[Recta[ptB1, ptC1]]**

$$\{v w (p^2 T u^2 - 2 p q T u v + q^2 T v^2 - 2 q r T v w + r^2 T w^2 + T \lambda + p^2 u^2 \lambda - 2 p q u v \lambda + q^2 v^2 \lambda - 2 p r u w \lambda - 2 q r v w \lambda + r^2 w^2 \lambda + \lambda^2) (p^2 T u^2 + q^2 T v^2 - 2 p r T u w - 2 q r T v w + r^2 T w^2 + T \lambda + p^2 u^2 \lambda - 2 p q u v \lambda + q^2 v^2 \lambda - 2 p r u w \lambda - 2 q r v w \lambda + r^2 w^2 \lambda + \lambda^2), \\ u w (p^2 T u^2 - 2 p q T u v + q^2 T v^2 - 2 p r T u w + r^2 T w^2 + T \lambda + p^2 u^2 \lambda - 2 p q u v \lambda + q^2 v^2 \lambda - 2 p r u w \lambda - 2 q r v w \lambda + r^2 w^2 \lambda + \lambda^2) (p^2 T u^2 + q^2 T v^2 - 2 p r T u w - 2 q r T v w + r^2 T w^2 + T \lambda + p^2 u^2 \lambda - 2 p q u v \lambda + q^2 v^2 \lambda - 2 p r u w \lambda - 2 q r v w \lambda + r^2 w^2 \lambda + \lambda^2), \\ u v (p^2 T u^2 - 2 p q T u v + q^2 T v^2 - 2 p r T u w + r^2 T w^2 + T \lambda + p^2 u^2 \lambda - 2 p q u v \lambda + q^2 v^2 \lambda - 2 p r u w \lambda - 2 q r v w \lambda + r^2 w^2 \lambda + \lambda^2) (p^2 T u^2 - 2 p q T u v + q^2 T v^2 - 2 q r T v w + r^2 T w^2 + T \lambda + p^2 u^2 \lambda - 2 p q u v \lambda + q^2 v^2 \lambda - 2 p r u w \lambda - 2 q r v w \lambda + r^2 w^2 \lambda + \lambda^2)\}$$

**rtA2B2C2 = Factor[Recta[ptB2, ptC2]]**

$$\{v w (p^2 T u^2 - 2 p q T u v + q^2 T v^2 - 2 q r T v w + r^2 T w^2 + T \lambda - p^2 u^2 \lambda + 2 p q u v \lambda - q^2 v^2 \lambda + 2 p r u w \lambda + 2 q r v w \lambda - r^2 w^2 \lambda - \lambda^2) (p^2 T u^2 + q^2 T v^2 - 2 p r T u w - 2 q r T v w + r^2 T w^2 + T \lambda - p^2 u^2 \lambda + 2 p q u v \lambda - q^2 v^2 \lambda + 2 p r u w \lambda + 2 q r v w \lambda - r^2 w^2 \lambda - \lambda^2), \\ u w (p^2 T u^2 - 2 p q T u v + q^2 T v^2 - 2 p r T u w + r^2 T w^2 + T \lambda - p^2 u^2 \lambda + 2 p q u v \lambda - q^2 v^2 \lambda + 2 p r u w \lambda + 2 q r v w \lambda - r^2 w^2 \lambda - \lambda^2) (p^2 T u^2 + q^2 T v^2 - 2 p r T u w - 2 q r T v w + r^2 T w^2 + T \lambda - p^2 u^2 \lambda + 2 p q u v \lambda - q^2 v^2 \lambda + 2 p r u w \lambda + 2 q r v w \lambda - r^2 w^2 \lambda - \lambda^2), \\ u v (p^2 T u^2 - 2 p q T u v + q^2 T v^2 - 2 p r T u w + r^2 T w^2 + T \lambda - p^2 u^2 \lambda + 2 p q u v \lambda - q^2 v^2 \lambda + 2 p r u w \lambda + 2 q r v w \lambda - r^2 w^2 \lambda - \lambda^2) (p^2 T u^2 - 2 p q T u v + q^2 T v^2 - 2 q r T v w + r^2 T w^2 + T \lambda - p^2 u^2 \lambda + 2 p q u v \lambda - q^2 v^2 \lambda + 2 p r u w \lambda + 2 q r v w \lambda - r^2 w^2 \lambda - \lambda^2)\}$$

**ptP1 = PoloTrilineal[rtA1B1C1]**

$$\{u (-2 q r v w \lambda + p^2 u^2 (T + \lambda) + q^2 v^2 (T + \lambda) - 2 p u (q v + r w) (T + \lambda) + (T + \lambda) (r^2 w^2 + \lambda)), \\ v (p^2 u^2 (T + \lambda) + (T + \lambda) (q^2 v^2 - 2 q r v w + r^2 w^2 + \lambda) - 2 p u (r w \lambda + q v (T + \lambda))), \\ w (p^2 u^2 (T + \lambda) + (T + \lambda) (q^2 v^2 - 2 q r v w + r^2 w^2 + \lambda) - 2 p u (q v \lambda + r w (T + \lambda)))\}$$

**ptP2 = PoloTrilineal[rtA2B2C2]**

$$\{u (-2 q r v w \lambda + p^2 u^2 (T + \lambda) + q^2 v^2 (T + \lambda) - 2 p u (q v + r w) (T + \lambda) + (T + \lambda) (r^2 w^2 + \lambda)), \\ v (p^2 u^2 (T + \lambda) + (T + \lambda) (q^2 v^2 - 2 q r v w + r^2 w^2 + \lambda) - 2 p u (r w \lambda + q v (T + \lambda))), \\ w (p^2 u^2 (T + \lambda) + (T + \lambda) (q^2 v^2 - 2 q r v w + r^2 w^2 + \lambda) - 2 p u (q v \lambda + r w (T + \lambda)))\}$$

Por eliminación, vemos que el lugar geométrico de P1 y P2 es una misma recta

**elim1 = Eliminate[{x, y, z} == k ptP1, {λ, k}]**

$-p q u y + q r w y + p r u z - q r v z = p (-q v + r w) x$

**elim2 = Eliminate[{x, y, z} == k ptP2, {λ, k}]**

$-p q u y + q r w y + p r u z - q r v z = p (-q v + r w) x$

Comprobamos que la recta obtenida es la que pasa por U y el polo trilineal de m.

**Recta[ptU, PoloTrilineal[m]]**

$\{p (q v - r w), -p q u + q r w, r (p u - q v)\}$