Propuesta de Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico "A. Einstein", 64100 Teramo, Italia.

El profesor Ercole Suppa tiene tiene una página Web

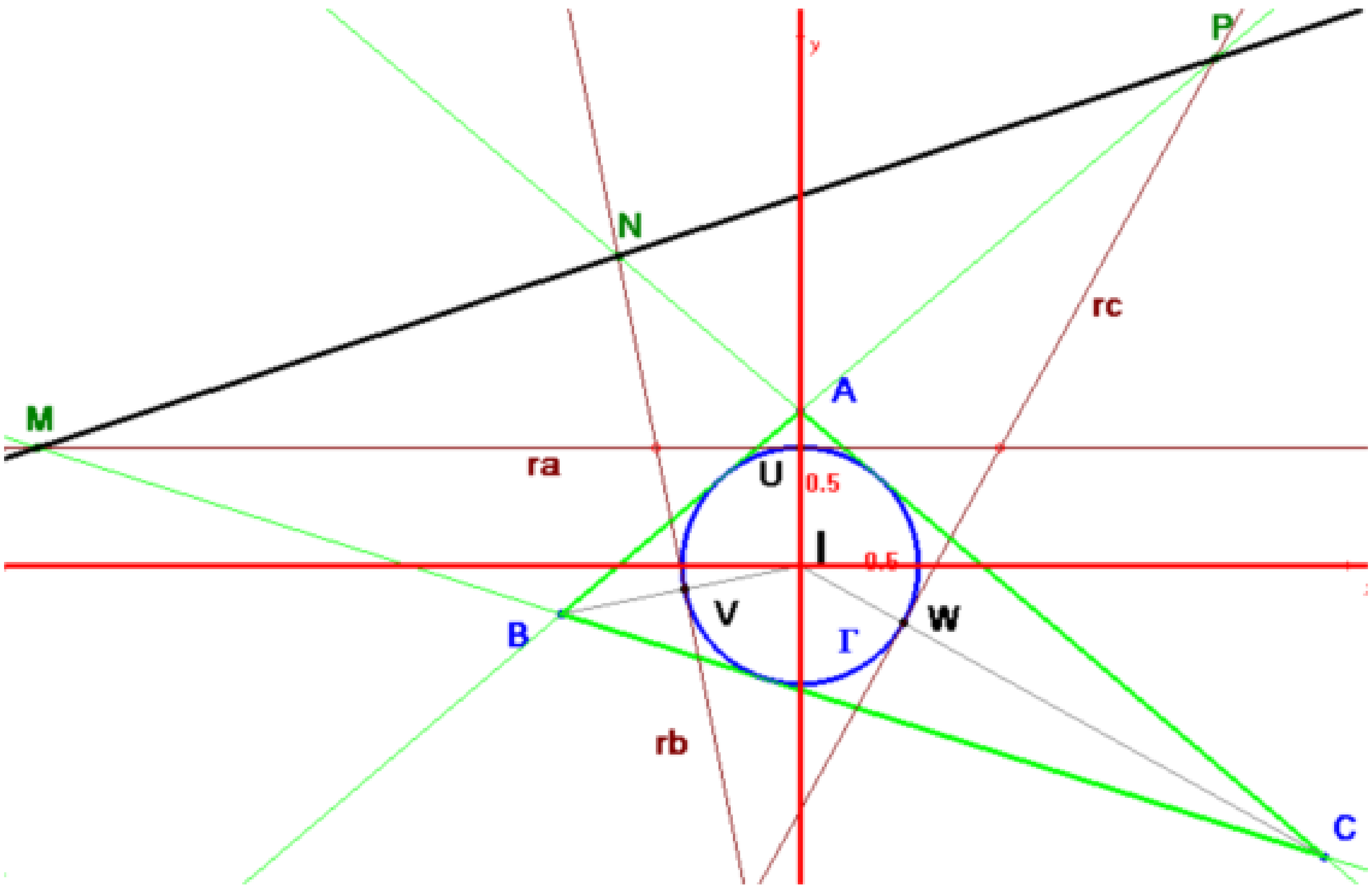
Problema 630

Sea ABC un triángulo. Sea I su incentro y Γ su circunferencia inscrita.

Sean U, V y W los puntos de corte de IA, IB, IC con Γ, y sean r_a, r_b y r_c las tangentes a Γ por U, V y W. Sean a, b y c las rectas BC, CA y AB. Sean M la intersección de a con r_a, N, la intersección de b con r_b y P la intersección de c con r_c. Demostrar que M, N y P están alineados.

Suppa, E. (2011): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.



Vamos a tomar como sistema de referencia el formado por el incentro como origen, la bisectriz de *A* como eje de ordenadas y la circunferencia inscrita con radio 1.

Llamaremos α, β, γ a los ángulos $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ respectivamente. La relación entre ellos es $\alpha + \beta + \gamma = 90$. Además supondremos que no hay dos ángulos iguales. Hay que considerar que el ángulo $\measuredangle AIB = 90 + \gamma$, y de forma similar los demás ángulos que rodean el incentro.

Con estos ejes las coordenadas de los puntos y rectas que intervienen son:

$$A = \left(0, \frac{1}{sen\ \alpha}\right);\ B = \left(\frac{-\cos\gamma}{sen\ \beta}, \frac{-sen\ \gamma}{sen\ \beta}\right);\ C = \left(\frac{\cos\beta}{sen\ \gamma}, \frac{-sen\ \beta}{sen\ \gamma}\right);$$

$$U = (0,1);\ V = (-\cos\gamma, -sen\ \gamma);\ W = (\cos\beta, -sen\ \beta).$$

Las ecuaciones de los lados del triángulo son:

Recta *BC:* $(sen^2\gamma - sen^2\beta)x - (sen\ \beta \cdot \cos\beta + sen\ \gamma \cdot \cos\gamma)y = \cos\alpha$

Recta *AB*: $(sen\ \beta + sen\ \alpha \cdot sen\ \gamma)x - (sen\ \alpha \cdot \cos\gamma)y = -\cos\gamma$

Recta *AC*: $(sen\ \gamma + sen\ \alpha \cdot sen\ \beta)x + (sen\ \alpha \cdot \cos\beta)y = \cos\beta$

(Con los ejes que se han tomado estas dos últimas rectas son simétricas respecto de *OY*, por tanto podría obtenerse una de la otra sin más que cambiar *x* por *–x*).

Las tangentes en los puntos *U, V* y *W* son:

$y = 1$; $(\cos\gamma)x + (sen\ \gamma)y = -1$ y $(\cos\beta)x - (sen\ \beta)y = 1$ respectivamente.

Con estos datos ahora calculamos los puntos *M, N* y *P.*

Se obtienen (con mucha paciencia) las siguientes coordenadas:

$M\left(\frac{\cos\gamma+\cos\beta}{sen\ \gamma - sen\ \beta}, 1\right)$; $N\left(\frac{\cos\beta}{sen\ \gamma - sen\ \alpha}, \frac{-1-sen\ \beta}{sen\ \gamma - sen\ \alpha}\right)$; $P\left(\frac{\cos\gamma}{sen\ \alpha - sen\ \beta}, \frac{1+sen\ \gamma}{sen\ \alpha - sen\ \beta}\right)$.

La condición de alineamiento de estos tres puntos es

$$\det(M,N,P)=0,$$

o de forma equivalente:

$$\begin{vmatrix} \cos\gamma + \cos\beta & sen\ \gamma - sen\ \beta & sen\ \gamma - sen\ \beta \\ \cos\beta & -1 - sen\ \beta & sen\ \gamma - sen\ \alpha \\ \cos\gamma & 1 + sen\ \gamma & sen\ \alpha - sen\ \beta \end{vmatrix} = 0$$

que se verifica fácilmente pues la fila primera es la suma de las otras dos.

En el caso de tener dos ángulos iguales, por ejemplo si $\beta = \gamma$, la bisectriz de *A* es también altura y la tangente en *U* es paralela al lado *BC*: el punto *M* está en el infinito.

Por otra parte, así como los lados *AB, AC* son simétricos respecto de esa bisectriz, también lo son las rectas r_b y r_c y por ello, también los puntos *N* y *P*. En resumen, la recta *NP* es paralela a *BC* y finalmente tenemos que los puntos *M, N* y *P* están alineados.■