

Problema 631.

Nota sobre este problema

La interpretación que he hecho da lugar a confusiones.

Intento aclararlo. Sea ABC un triángulo cuyos lados son a, b y c . Sean P y P' dos puntos del plano. (Rouché y Camberousse los restringen a puntos de la circunferencia circunscrita). Sean r la recta perpendicular por P al lado a , y s la recta perpendicular por P' al lado b .

1.- Sea M el punto de intersección de r y s . Demostrar que M describe una circunferencia cuando C se mueve sobre S estando A, B, P y P' fijos.

En el segundo apartado, P y P' están sobre la circunferencia S , y se desplazan manteniendo una longitud PP' constante. A, B, C permanecen fijos. Se pide hallar el lugar de los centros de las circunferencias circunscritas a $PP'M$

Actualizado el 6 de diciembre de 2011

49 Un triángulo ABC está inscrito en un círculo S ; se consideran dos puntos P y P' . Las proyecciones de estos puntos sobre los lados del triángulo están sobre dos rectas que se cortan en M

1.- Demostrar que M describe una circunferencia S' cuando el vértice C se mueve sobre S estando A, B, P y P' fijos.

2.- Encontrar el lugar geométrico de los centros de los círculos S' cuando P y P' se desplazan sobre S con una longitud constante.

Rouché, E. y de Comberousse, C.H. (1900): *Traité de Géométrie*. 7ª edición, revisada y aumentada por Eugène Rouché. Première part. Geometrie plane. Paris Gauthier Villars, imprimeur libraire. (p. 511)

Este libro ha sido consultado por el director en la Biblioteca Militar de Sevilla el 23 de noviembre 2011. Mi agradecimiento por la amabilidad mostrada.

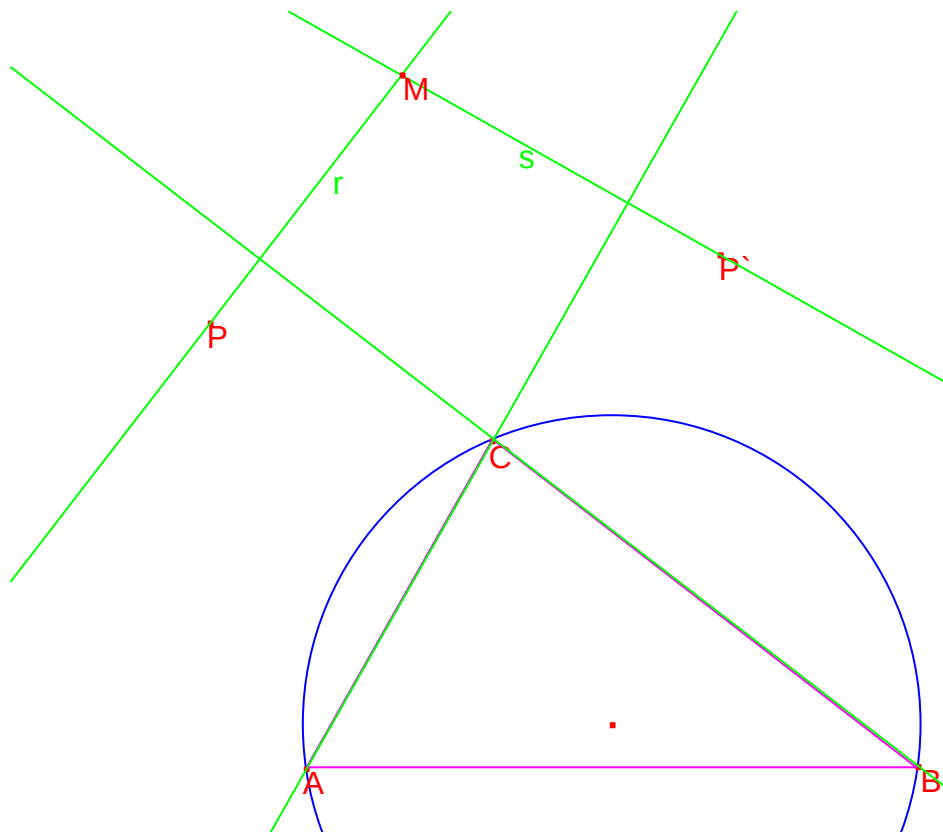
49. Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle S , on considère sur la circonférence deux points P et P' . Les projections de ces points sur les côtés du triangle sont situés sur deux droites qui se coupent en M . Cela posé :

1° Démontrer que ce point M décrit une circonférence S' quand le sommet C se meut sur le cercle S , les points A, B, P, P' restant fixes;

2° Trouver le lieu des centres des cercles S' lorsque les points P et P' se déplacent sur la circonférence S , de façon que l'arc PP' ait une longueur constante.
(Agrégation, 1879.)

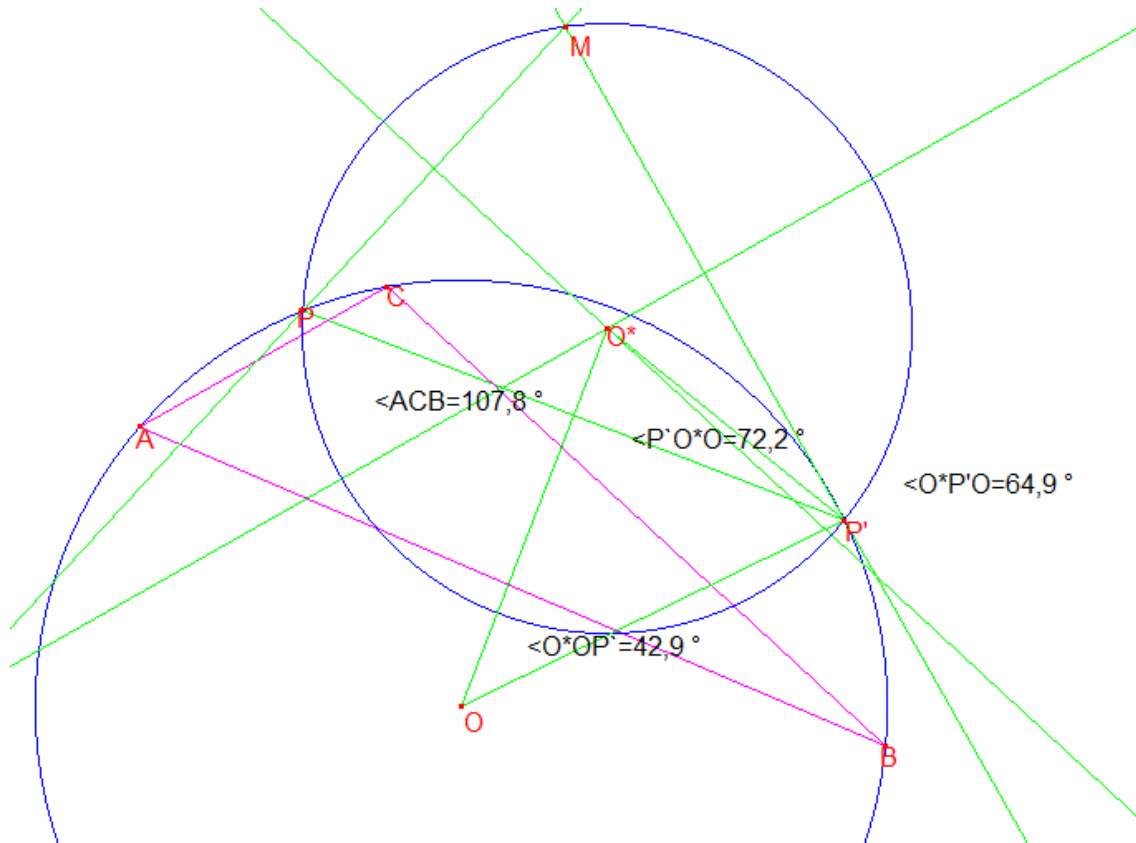
Solución del director:

1.-



$\angle PMP' = 180 - C$. Luego el lugar geométrico de M forma el arco capaz de $180 - C$ que describe una circunferencia que contiene a P y P'. Cuando el punto C se encuentra por el arco contrario será $\angle PMP' = C$, y M completará la circunferencia.

2.-



Sean P y P' sobre S. El centro O* de la circunferencia circunscrita a MPP' es tal que la recta OO* es mediatriz de PP', por lo que $\angle O^*OP' = w/2$, siendo $\angle P'OP = w$ constante y siendo $\angle P'OO^* = 180 - C$, por lo que $\angle OP'O^* = C - (w/2)$.

Así siendo R el radio de la circunscrita, w y C conocidos, es, según la fórmula del seno aplicada a OO*P',

$$OO^* = R (\sin (C - (w/2)) / \sin C.$$

Es decir OO* es constante, luego el lugar pedido es una circunferencia concéntrica con la circunscrita.

Se puede estudiar para qué puntos P y P' el lugar coincide con la circunscrita:

Habrà de ser $(\sin (C - (w/2)) / \sin C = 1$, es decir, o

$$C - (w/2) = C, \quad w = 0, \quad P = P'$$

En el caso de ser $C > 90$, $180 - (C - (w/2)) = C$, es decir, $w/2 = 2C - 180$.

Si $w/2 > 2C - 180$, la circunferencia lugar será interior a la circunscrita.

Si $w/2 < 2C - 180$, la circunferencia lugar será exterior a la circunscrita

En el caso de ser $C < 90$, será coincidente con la circunscrita si:

$C - (w/2) = 180 - C$, es decir, $w/2 = 180 - 2C$.

Si $w/2 < 180 - 2C$, la circunferencia lugar será exterior a la circunscrita

Si $w/2 > 180 - 2C$, la circunferencia lugar será interior a la circunscrita

Ricardo Barroso Campos

Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla