

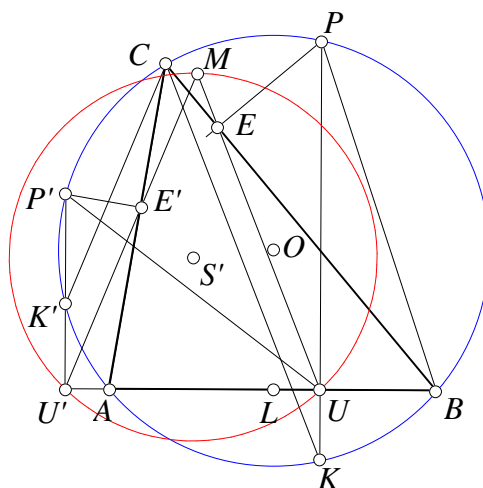
Problema 631 de triángulos cabri. Un triángulo ABC está inscrito en un círculo S ; se consideran dos puntos P y P' (sobre S). Las proyecciones de estos puntos sobre los lados del triángulo están sobre dos rectas que se cortan en M .

1. Demostrar que M describe una circunferencia S' cuando el vértice C se mueve sobre S estando A , B , P y P' fijos.
2. Encontrar el lugar geométrico de los centros de los círculos S' cuando P y P' se desplazan sobre S con una longitud constante.

Rouché, E. y de Comberousse, C.H. (1900): *Traité de Géométrie*. 7ª ed., p. 511.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Sean U y E las proyecciones de P sobre AB y BC , y U' y E' las proyecciones de P' sobre CA y AB respectivamente. Las rectas UE y $U'E'$ son las rectas de Simson de los puntos P y P' .

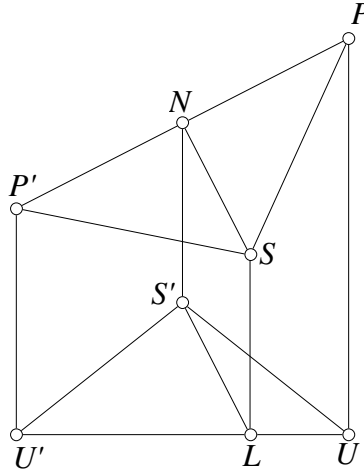


Supongamos que la perpendicular por P a la recta AB corta la circunferencia S en K , entonces las rectas CK y UE son paralelas. En efecto, por ser cíclico el cuadrilátero $PEUB$, es $\angle UEB = \angle UPB = \angle KPB = \angle KCB$. De igual forma, si la perpendicular por C a AB corta a la circunferencia S en K' , las rectas CK' y $U'E'$ son paralelas.

Entonces, el ángulo formado por las rectas de Simson es igual al ángulo KCK' , que es la mitad del ángulo determinado por los puntos P y P' , y ello indica que desde el punto M se ve el segmento UU' bajo un ángulo constante,

y por tanto, el punto M describirá una circunferencia cuyo centro estará en la mediatriz del segmento UU' .

Para responder al segundo apartado, consideramos la siguiente figura, resultante de considerar sólo algunos de los elementos que aparecen en el enunciado.



Supongamos que los triángulos SPP' e $S'UU'$ de la figura son isósceles y semejantes, y que los puntos U, L, U' son las proyecciones de P, S, P' sobre la recta UU' .

Usando números complejos y nombrando a los afijos de cada punto con la correspondiente letra minúscula, si situamos el origen de coordenadas en el punto medio de UU' , tenemos $u = a$, $u' = -a$, $p = a + 2bi$, $p' = -a + 2ci$, $n = (p + p')/2 = (b + c)i$.

Para el punto S' que estará sobre el eje y , será $s' = \lambda i$ para cierto λ . Imponiendo que los triángulos SPP' y $S'UU'$ son semejantes, se cumplirá

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -a & \lambda i \\ a + 2bi & -a + 2ci & s \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s = -\frac{(b-c)\lambda}{a} + (b+c+\lambda)i \Rightarrow l = -\frac{(b-c)\lambda}{a}.$$

$$n - s = \lambda i + \frac{(b-c)\lambda}{a} = s' - l \Rightarrow \overrightarrow{LS'} = \overrightarrow{SN}.$$

Como la cuerda PP' se mantiene de longitud constante, también lo será la distancia SN que une el centro de la circunferencia con el punto medio de PP' ,

y así, el centro S' se mantendrá a una distancia constante de L , que es el punto medio de AB en nuestro problema.

Observación. Hemos utilizado que los triángulos $z_1 z_2 z_3$ y $w_1 w_2 w_3$ son directamente semejantes si y solo si se cumple

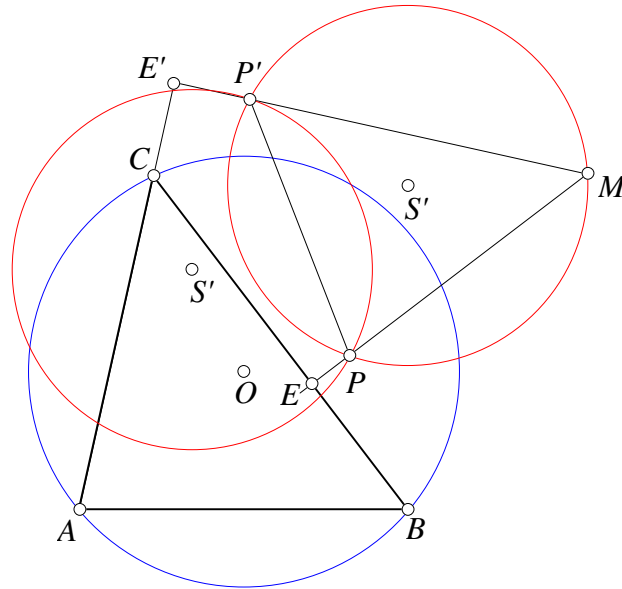
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto es así ya que

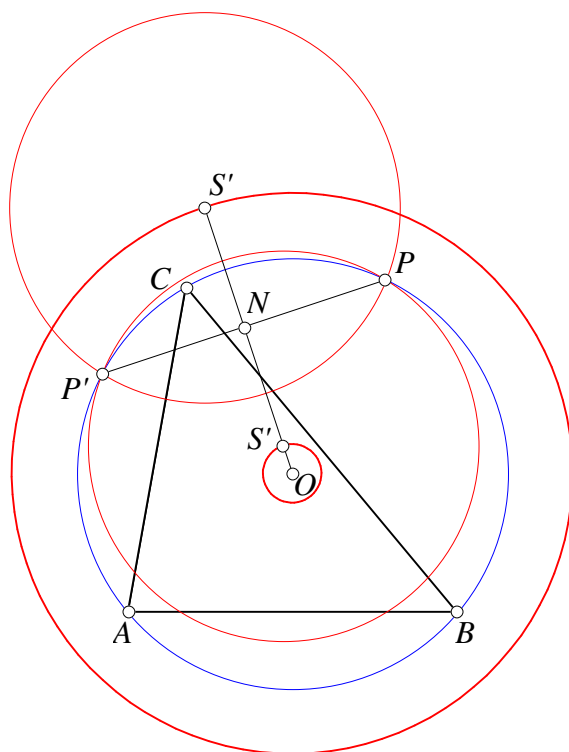
$$\begin{aligned} \triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3 &\Leftrightarrow \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \text{ y } \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Variante propuesta por Ricardo Barroso Campos

La variante para el primer apartado es considerar dos puntos P, P' cualesquiera y desde uno de ellos trazar una perpendicular a uno de los lados que pasan por C y desde el otro punto una perpendicular al otro lado.



Para el segundo apartado, la variante consiste en mantener A, B, C sobre la circunferencia S y mover P, P' de modo que el arco PP' sea constante.


$$OS' = ON + NS' = R \cos \theta \pm PN \cot C = R \cos \theta \pm \frac{R \sin \theta \cos C}{\sin C}$$

$$= \frac{R \sin(\theta \pm C)}{\sin C}.$$

4