Problema 633 de *triánguloscabri*. *Sea ABC un triángulo con lados a, b y c. Encontrar el lugar geométrico de los puntos P tal que*

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = a^2 + c^2.$$

Propuesto por Roberto Bosch Cabrera, basado en el problema 547, propuesto por Vicente Vicario García.

*S*olución de Francisco Javier García Capitán.

Usaremos la fórmula sobre los cuadrados de las distancias de un punto P a los vértices de un triángulo de referencia (ver mi solución del problema 380):

Suma de cuadrados de distancias a los vértices. *Sean ABC un triángulo, P y Q puntos cualesquiera y $(u : v : w)$ las coordenadas baricéntricas del punto Q respecto del triángulo ABC. Entonces,*

$$uPA^2 + vPB^2 + wPC^2 = (u + v + w)PQ^2 + \frac{a^2vw + b^2wu + c^2uv}{u + v + w}.$$

También usaremos la fórmula de la mediana correspondiente al vértice B:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}.$$

Considerando $Q = G = (1 : 1 : 1)$,

$$\begin{aligned}
a^2 + c^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 = PG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \\
\Leftrightarrow PG^2 = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{9} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{4} = \frac{4}{9}m_b^2 \\
\Leftrightarrow PG = \frac{2}{3}m_b \Leftrightarrow PG = BG,
\end{aligned}$$

lo que nos indica que un punto P cumplirá la condición del enunciado si y solo si está sobre la circunferencia centrada en el baricentro del triángulo y que pasa por el vértice B.