Problema basado en el problema sin resolver 547 de la revista Cabri, propuesto por Vicente Vicario García, España.

Sea ABC un triángulo con lados a, b, c. Encontrar el lugar geométrico de los puntos P tal que $AP^2 + BP^2 + CP^2 = a^2 + c^2$.

Solución

Procedamos por geometría analítica. Sean $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$, entonces

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 2a_1x - 2b_1x - 2c_1x - 2a_2y - 2b_2y - 2c_2y + a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 \end{aligned}$$

de donde dividiendo por 3 y completando cuadrados el lugar geométrico estará caracterizado por la ecuación

$$\left[x - \frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right]^2 + \left[y - \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right]^2 =$$
$$\frac{(a_1+b_1+c_1)^2}{9} + \frac{(a_2+b_2+c_2)^2}{9} - \frac{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+c_1^2+c_2^2}{3} + \frac{a^2+c^2}{3}$$

pero notar que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - 2(a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1 + a_2b_2 + b_2c_2 + c_2a_2)$$

por lo tanto la ecuación se convierte en

$$\left[x - \frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right]^2 + \left[y - \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right]^2 = -\frac{a^2+b^2+c^2}{9} + \frac{a^2+c^2}{3} = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{9}$$

pero es bien conocido que las coordenadas del baricentro son $\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ y que la mediana que parte del vértice B (m_b) es igual a $\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}$, de donde el lugar geométrico es la circunferencia con centro en el baricentro G y radio GB.

Roberto Bosch Cabrera, Florida, EE.UU