

### Problema 635

Demostreu que l'àrea d'un triangle acutangle és igual al producte del radi de la circumferència circumscrita pel semiperímetre del triangle òrtic.

Guiu, M. y Páez, F. (1935):

Exposición didáctica de cuestiones geométricas destinada a facilitar la preparación para concursos de ingreso en Academias y Escuelas de carreras científicas. Tomo I 1ª Edición. Barcelona

Bosch Casa editorial, Apartado 928

Solució de Ricard Peiró.

Siga  $\triangle ABC$  un triangle acutangle i  $R$  el radi de la circumferència circumscrita.

L'àrea del triangle  $\triangle ABC$  és:

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2.$$

Siguen  $D, E, F$  els peus de les altures referides a les bases,  $a, b, c$ , respectivament.

Siga  $H$  l'ortocentre del triangle.

$$\angle BHD = C.$$

El quadrilàter  $BDHF$  és inscriptible ja que els angles  $D = F = 90^\circ$  són suplementaris.

Notem que per ser angles inscrits  $\angle BFC = \angle BHD = C$ .

Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle BDF$ :

$$\frac{\overline{DF}}{\sin B} = \frac{\overline{BD}}{\sin C}. \quad \overline{DF} = \frac{\sin B}{\sin C} \overline{BD}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle BDA$ :

$$\overline{BD} = c \cdot \cos B.$$

Aleshores:

$$\overline{DF} = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} \cos B.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle ABC$ :

$$c \cdot \sin B = b \cdot \sin C, \text{ aleshores:}$$

$$\overline{DF} = b \cdot \cos B.$$

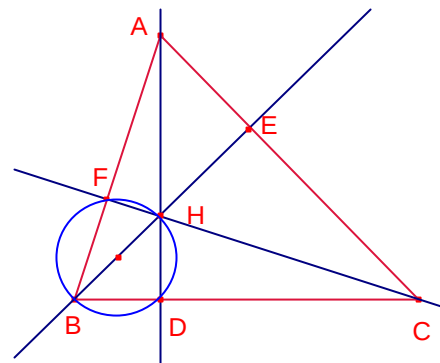
Anàlogament,  $\overline{DE} = c \cdot \cos C$ ,  $\overline{EF} = a \cdot \cos A$ .

$$\frac{\overline{DF} + \overline{DE} + \overline{EF}}{2} R = \frac{R}{2} (a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C) =$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $\triangle ABC$ :

$$= \frac{R}{2} \left( a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + c \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) =$$

$$= \frac{R}{4abc} (a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)) =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{R}{4abc} (-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) = \\
&= \frac{R}{4abc} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\
&= \frac{1}{16 \cdot S_{ABC}} (4 \cdot S_{ABC})^2 = S_{ABC}
\end{aligned}$$