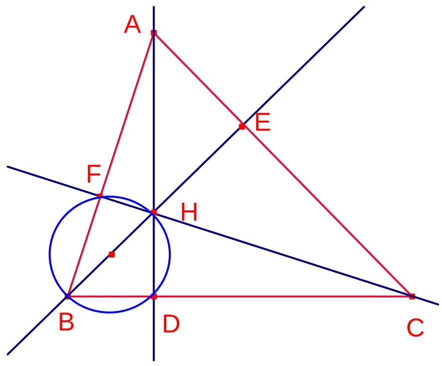
Problema 635

Demostremos que el área de un triángulo acutángulo es igual al producto del radio de la circunferencia circunscrita por el semiperímetro del triángulo órtico.

Guiu, M. y Páez, F. (1935):

Exposición didáctica de cuestiones geométricas destinada a facilitar la preparación para concursos de ingreso en Academias y Escuelas de carreras científicas. Tomo I 1º Edición. Barcelona

Bosch Casa editorial, Apartado 928




Solución de Ricard Peiró.

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo acutángulo y R el radio de la circunferencia circunscrita.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$S_{ABC}=\frac{abc}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\,.$$

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2\,.$$

Sean D, E, F los pies de las alturas referidas a las bases, a, b, c, respectivamente.

Sea H el ortocentro del triángulo.

$\angle BHD=C$.

El cuadrilátero BDHF es inscriptible ya que los ángulos $D=F=90º$ son suplementarios.

Notemos que por ser ángulos inscritos $\angle BFC=BHD=C$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{BDF}$:

$$\frac{\overline{DF}}{\sin B}=\frac{\overline{BD}}{\sin C}.\quad \overline{DF}=\frac{\sin B}{\sin C}\overline{BD}\,.$$

Aplicando razones trigonométricas triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BDA}$:

$\overline{BD}=c\cdot\cos B$.

Entonces:

$$\overline{DF}=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}\cos B\,.$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$c\cdot\sin B=b\cdot\sin C$, entonces:

$\overline{DF}=b\cdot\cos B$.

Análogamente, $\overline{DE}=c\cdot\cos C$, $\overline{EF}=a\cdot\cos A$.

$$\frac{\overline{DF}+\overline{DE}+\overline{EF}}{2}R=\frac{R}{2}\left(a\cdot\cos A+b\cdot\cos B+c\cdot\cos C\right)=$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$=\frac{R}{2}\left(a\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=$$

$$=\frac{R}{4abc}\left(a^2(b^2+c^2-a^2+b^2(a^2+c^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)\right)=$$

$$= \frac{R}{4abc}\left(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2\right) =$$

$$= \frac{R}{4abc}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) =$$

$$= \frac{1}{16 \cdot S_{ABC}}\left(4 \cdot S_{ABC}\right)^2 = S_{ABC}$$