

**Problema 636.** Dado un triángulo  $ABC$ , hallar dos triángulos  $DEF$  y  $GHI$  tales que el simétrico de  $D$  respecto a  $E$  sea  $A$ , el simétrico de  $E$  respecto de  $F$  sea  $B$  y el simétrico de  $F$  respecto de  $D$  sea  $C$  y que el simétrico de  $G$  respecto a  $H$  sea  $A$ , el simétrico de  $H$  respecto de  $I$  sea  $C$  y el simétrico de  $I$  respecto de  $G$  sea  $B$ . Hallar los lados de los dos triángulos  $DEF$  y  $GHI$  en función de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , lados de  $ABC$ .

*Barroso, R. (2012): Comunicación personal.*

**Soluzione di Ercole Suppa.**

Per risolvere il problema usiamo il calcolo vettoriale. Fissata un punto qualsiasi  $O$  come origine, preso un qualsiasi punto  $X$  indichiamo il vettore  $\overrightarrow{OX}$  con  $\vec{X}$ . Dalle condizioni del problema abbiamo che

$$\begin{cases} \vec{A} + \vec{D} = 2\vec{E} \\ \vec{B} + \vec{E} = 2\vec{F} \\ \vec{C} + \vec{F} = 2\vec{D} \end{cases}$$

da cui, con un facile calcolo, si ricava che:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{\vec{A} + 2\vec{B} + 4\vec{C}}{7} \\ \vec{E} &= \frac{4\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C}}{7} \\ \vec{F} &= \frac{2\vec{A} + 4\vec{B} + 4\vec{C}}{7} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ED} &= \vec{D} - \vec{E} \\ &= \frac{1}{7} (\vec{A} + 2\vec{B} + 4\vec{C} - 4\vec{A} - \vec{B} - 2\vec{C}) \\ &= \frac{1}{7} (-3\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C}) \\ &= \frac{1}{7} (\vec{B} - \vec{A}) + \frac{2}{7} (\vec{C} - \vec{A}) \\ &= \frac{1}{7} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{7} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{7} (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
ED^2 &= \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED} \\
&= \frac{1}{49} \left( \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right)^2 \\
&= \frac{1}{49} \left( c^2 + 4b^2 + 4 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \\
&= \frac{1}{49} (c^2 + 4b^2 + 4bc \cdot \cos A) \\
&= \frac{1}{49} \left( c^2 + 4b^2 + 4bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\
&= \frac{1}{49} (6b^2 + 3c^2 - 2a^2)
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$ED = \frac{1}{7} \sqrt{6b^2 + 3c^2 - 2a^2}$$

e, permutando circolarmente le lettere  $a, b, c$ , si ottengono le misure di  $EF, DF$

$$EF = \frac{1}{7} \sqrt{6c^2 + 3a^2 - 2b^2}, \quad DF = \frac{1}{7} \sqrt{6a^2 + 3b^2 - 2c^2}$$

Ragionando analogamente si trova che

$$\overrightarrow{G} = \frac{\overrightarrow{A} + 4\overrightarrow{B} + 2\overrightarrow{C}}{7}, \quad \overrightarrow{H} = \frac{4\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}}{7}, \quad \overrightarrow{I} = \frac{2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + 4\overrightarrow{C}}{7} \Rightarrow$$

$$GH = \frac{1}{7} \sqrt{6c^2 + 3b^2 - 2a^2}$$

$$GI = \frac{1}{7} \sqrt{6a^2 + 3c^2 - 2b^2}$$

$$HI = \frac{1}{7} \sqrt{6b^2 + 3a^2 - 2c^2}$$

□