**Problema 636 de *triánguloscabri*.** *Dado un triángulo $ABC$, hallar dos triángulos $DEF$ y $GHI$ tales que*

*$A$ es el simétrico de $D$ respecto de $E$,*

*$B$ es el simétrico de $E$ respecto de $F$,*

*$C$ es el simétrico de $F$ respecto de $D$, y*

*$A$ es el simétrico de $G$ respecto de $H$,*

*$B$ es el simétrico de $I$ respecto de $G$,*

*$C$ es el simétrico de $H$ respecto de $I$. Hallar los lados de los dos triángulos $DEF$ y $GHI$ en función de $a$, $b$ y $c$, lados de $ABC$.*

Propuesto por Ricardo Barroso Campos, y dedicado, in memoriam, a José Real Anguas, compañero y amigo.

*Solución de Francisco Javier García Capitán.*

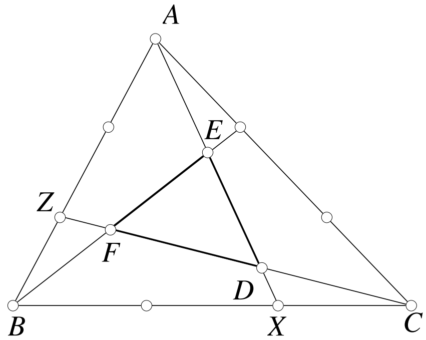
Planteando el sistema

$$\begin{gathered}\frac{A+D}{2}=E, \quad \frac{B+E}{2}=F, \quad \frac{C+F}{2}=D, \\ \Leftrightarrow 2E-D=A, \quad 2F-E=B, \quad 2D-F=C,\end{gathered}$$

obtenemos

$$D=\frac{A+2B+4C}{7}, \quad E=\frac{4A+B+2C}{7}, \quad F=\frac{2A+4B+C}{7}.$$

Ahora, siendo $7D=A+2B+4C$, si llamamos $X$ al punto que divide a $BC$ en la proporción $2:1$, tendremos $3X=B+2C$ y $7D=A+6X$, por tanto $D$ está sobre $AX$ y cumple $AD:DX=6:1$. De la misma forma, si llamamos $Z$ al punto que divide a $AB$ en la proporición $2:1$, tendremos $3Z=A+2B$ y $7D=3Z+4C$, por lo que $D$ está en la recta $CZ$ y $CD:DZ=3:4$. De la misma forma podemos obtener los puntos $E$ y $F$ como intersecciones de rectas que unen los vértices con las segundas divisiones de los lados en tres partes iguales tal como se indica en la figura siguiente:



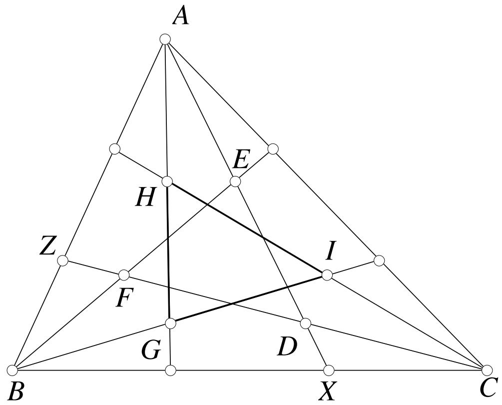
Ahora, de $CD : DZ = 3 : 4$ y $CF : FZ = 6 : 1$ podemos deducir $CD : DF : FZ = 3 : 3 : 1$, resultando que $DF = \frac{3}{7}CZ$. Para hallar $CZ$ usamos el teorema de Stewart:

$$\begin{aligned}
&AB \cdot \left(CZ^2 + AZ \cdot ZB\right) = BC^2 \cdot AZ + CA^2 \cdot ZB \\
&c \cdot \left(CZ^2 + \frac{2c}{3} \cdot \frac{c}{3}\right) = a^2 \cdot \frac{2c}{3} + b^2 \cdot \frac{c}{3} \\
&CZ^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2c^2}{9} = \frac{1}{9}\left(6a^2 + 3b^2 - 2c^2\right).
\end{aligned}$$

Así resulta que $FD = \frac{1}{7}\sqrt{6a^2 + 3b^2 - 2c^2}$. Por simetría, haciendo una rotación de las letras, tendremos

$$DE = \frac{1}{7}\sqrt{6b^2 + 3c^2 - 2a^2}, \quad EF = \frac{1}{7}\sqrt{6c^2 + 3a^2 - 2b^2}.$$

Respecto del triángulo $GHI$, basta observar, por el enunciado, que $HIG$ es el resultado de calcular el triángulo $DEF$ al triángulo $CBA$, por lo que obtendremos sus vértices como intersección de rectas que unen los vértices de $ABC$ con los primeros puntos de trisección de los lados opuestos.




La fórmula de la longitud $HI$ será el resultado de aplicar la fórmula del $DE$ al triángulo $CBA$, por tanto $HI = \frac{1}{7}\sqrt{6b^2 + 3a^2 - 2c^2}$. De la misma forma, $IG$ se corresponde con $EF$, es decir $IG = \frac{1}{7}\sqrt{6a^2 + 3c^2 - 2b^2}$, y $GH$ se corresponde con $FD$, es decir $GH = \frac{1}{7}\sqrt{6c^2 + 3b^2 - 2a^2}$.